Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Справиться с вызовами современности наша страна (как и весь мир) может, лишь выйдя на инновационный путь развития. Для повышения эффективности процессов управления предприятиями и организациями, обеспечения технологической независимости нашей страны необходимо применять экономико-математические методы и модели, основанные на адекватных теоретических подходах. В частности, следует учитывать, что исходные данные известны лишь с некоторой степенью точности, а самим методам и моделям присущи методические погрешности.

Процессы управления предприятиями реализуются в реальных ситуациях, которым присущ достаточно высокий уровень неопределенности. Велика роль нечисловой информации как на «входе», так и на «выходе» процесса принятия управленческого решения. Неопределенность и нечисловая природа управленческой информации должны быть отражены при анализе устойчивости экономико-математических методов и моделей.

Для обоснованного практического применения математических моделей процессов управления предприятиями и основанных на них экономико-математических методов должна быть изучена устойчивость выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей. В результате удается оценить точность предлагаемого управленческого решения, выбрать из многих моделей наиболее адекватную, установить необходимую точность нахождения параметров и т.п.

Назрела необходимость в проведении исследований, нацеленных на разработку и развитие устойчивых экономико-математических методов и моделей, предназначенных для модернизации управления предприятиями. (Понятие устойчивости конкретизируется в соответствии с решаемой организационно-экономической задачей.) Одним из таких исследований и является настоящая диссертационная работа.

Степень изученности и разработанности проблемы. В публикациях отечественных и зарубежных авторов имеются теоретические и методологические разработки по существенным аспектам решаемой в диссертации проблемы. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений развивается с XIX в. (А.М. Ляпунов, Р. Курант, А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин, А.Н. Тихонов). В рамках теории систем проблему устойчивости рассматривали С.В. Емельянов, М. Месарович, Я. Такахара. Проблему устойчивости математических теорем относительно изменения их условий изучал С. Улам. Изучение свойств, не меняющихся при малых деформациях, т.е. устойчивых в терминологии настоящего исследования, ведут В.И. Арнольд, Г. Брёкер, В. Гийемин, М. Голубицкий, Л. Ландер (в рамках теории катастроф). В соответствии с концепцией «мягких» и «жестких» моделей В.И. Арнольда переход к случаю «общего положения» позволяет нам получать более сильные с математической точки зрения результаты.

Вероятностно-статистическое моделирование неопределенностей экономических явлений и процессов и разработку соответствующих методов анализа данных проводим в традициях отечественной вероятностно-статистической научной школы (А.Н. Колмогоров, Н.В. Смирнов, Б.В. Гнеденко, Л.Н. Большев, В.В. Налимов). Используем асимптотические методы математической статистики (А.А.Боровков, И.А. Ибрагимов, Ю.В. Прохоров, Р.З. Хасьминский). Важные результаты получены в области непараметрической статистики, нацеленной на получение выводов, устойчивых к изменению функций распределения результатов наблюдений (А.Н. Колмогоров, Н.В. Смирнов, Ю.Н. Тюрин, В.Н. Тутубалин, М. Холлендер, Д.А. Вулф). Устойчивостью процедур, характеризаций и разложений занимались В.М. Золотарев, М.Дж. Кендалл, А. Стьюарт, А.М. Каган, Ю.В. Линник, С.Р. Рао, И.В. Островский). Робастным статистическим методам посвящены работы Г.В. Тьюки, С.А. Смоляка, Б.П. Титаренко, П.Хьюбера, Ф.Хампеля.

Объектам нечисловой природы посвящена теория измерений (П. Суппес, Дж. Зинес, С.С. Стивенс, И. Пфанцагль, Ю.Н. Толстова), теория нечеткости (Л.А. Заде), интервальная математика и статистика (А.П. Вощинин, Ю.И. Шокин), статистика бинарных отношений и парных сравнений (Дж. Кемени, Дж. Снелл, Г. Дэвид), статистический контроль по альтернативному признаку (А.Н. Колмогоров, Ю.К. Беляев, Я.П. Лумельский).

Экономико-математическое моделирование опирается на методологию кибернетики (Н. Винер, Н.Н. Моисеев, В.М. Глушков, Ст. Бир, А.И. Берг). Большое влияние на автора оказали работы таких исследователей в области экономико-математических методов, как Л.В. Канторович, В.Л. Макаров, Г.Б. Клейнер, К.А. Багриновский, Е.Г. Гольштейн, В.Н. Лившиц, А.М. Рубинов, С.А. Смоляк. Отметим работы по управлению запасами Р.Г. Вильсона, Ф. Харриса, Дж. Букана, Э. Кенигсберга, Е.В. Булинской, Г.Л. Бродецкого, В.В. Дыбской, А.В. Мищенко, Ф. Хэнсменна, Дж. Хедли, Т. Уайтина, О.Д. Проценко, Ю.И. Рыжикова.

Большой вклад в решение проблем управления организационными системами внесли Д.А. Новиков, В.Н. Бурков, В.Г. Горский, А.А. Дорофеюк, Б.Г. Литвак, О.И. Тёскин, Ю.В. Сидельников. Наиболее важны для нас исследования по проблемам управления предприятиями В.Д. Калачанова, А.П. Ковалева, Б.А. Лагоши.

Мы работаем в русле научной школы МГТУ им. Н.Э. Баумана по экономике и организации производства (А.А. Колобов, И.Н. Омельченко, С.Г. Фалько и др.). Важны для нас исследования, выполненные в Российской академии наук (прежде всего в Центральном экономико-математическом институте, Институте проблем управления и Институте системного анализа), в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова и других вузах и научно-исследовательских организациях. Невозможно перечислить здесь сотни отечественных и зарубежных ученых и специалистов, которые получили важные результаты в рассматриваемой области. Ссылки на работы многих из них приведены в тексте диссертации.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационного исследования является разработка и развитие методологии обоснования, выбора и создания новых математических методов и моделей, направленных на модернизацию управления предприятиями на основе изучения устойчивости получаемых с их помощью выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей.

Для достижения поставленной в работе цели необходимо решить следующие задачи:

1. Развить методологию разработки математических методов и моделей процессов управления предприятиями, разработать общий подход к изучению устойчивости (общую схему устойчивости) таких моделей и методов и выделить частные постановки проблем устойчивости, в том числе устойчивость к изменению данных, их объемов и распределений, по отношению к временным характеристикам. Обосновать моделирование с помощью нечисловых объектов как подход к построению устойчивых методов и моделей.

2. На основе методологии устойчивости разработать непараметрические (устойчивые к изменению распределения) статистические методы для решения конкретных задач управления промышленными предприятиями – для оценки характеристик, прогнозирования, сегментации рынка и др.

3. Для разработки экономико-математических моделей нечисловых объектов установить связи между различными видами объектов нечисловой природы, построить вероятностные модели их порождения. На основе расстояний (показателей различия, мер близости) и задач оптимизации

развить статистическую теорию в пространствах общей природы. Разработать методы моделирования конкретных нечисловых объектов.

4. Как самостоятельное направление нечисловой статистики разработать асимптотическую статистику интервальных данных на основе понятий нотны и рационального объема выборки, развить интервальные аналоги основных областей прикладной статистики.

5. На основе концепции устойчивости по отношению к временным характеристикам (моменту начала реализации проекта, горизонту планирования) провести экономико-математическое моделирование процессов стратегического управления промышленными предприятиями: обосновать применение асимптотически оптимальных планов, дать характеризацию моделей с дисконтированием.

6. На основе методологии устойчивости разработать устойчивые экономико-математические методы и модели процессов управления в функциональных областях производственно-хозяйственной деятельности предприятий и организаций, в которых существенны неопределенности, допускающие экономико-математическое моделирование, в частности, при использовании экспертных методов, в инновационном и инвестиционном менеджменте, при управлении качеством промышленной продукции, выявлении предпочтений потребителей, управлении материальными ресурсами предприятия.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются процессы управления производственно-хозяйственной деятельностью предприятий и организаций.

Предметом исследования являются вопросы разработки адекватных экономико-математических методов и моделей, предназначенных для модернизации (совершенствования, рационализации, оптимизации) процессов управления производственно-хозяйственной деятельностью предприятий и организаций.

Теоретическая и методологическая основа исследования. Теоретическую основу диссертации составили фундаментальные отечественные и зарубежные работы в области экономики и организации производства, достижения отечественной вероятностно-статистической школы, научных школ в области теории управления и экономико-математических методов. Для решения поставленных в диссертации задач использовались методы прикладной статистики, теории измерений, нечетких множеств, экономико-математического моделирования, теории оптимизации, экспертных оценок, статистики бинарных отношений, теории принятия решений, контроллинга, экономики предприятия, управления инновациями и инвестициями, менеджмента высоких технологий, стратегического планирования развития предприятий и других направлений. Достоверность и обоснованность полученных результатов базируется на использовании системного подхода, теоретических доказательствах и результатах статистического моделирования, опыте практического использования.

Научная новизна заключается в развитии положений теории устойчивости и разработке на их основе подхода к обоснованию, выбору и созданию экономико-математических методов и моделей, предназначенных для модернизации управления предприятиями, в разработке и развитии на основе указанного подхода математического аппарата анализа экономических систем, прежде всего непараметрической и нечисловой статистики, а также в разработке и исследовании устойчивых математических методов и моделей в ряде функциональных областей деятельности предприятий и организаций.

Основные результаты исследования, обладающие научной новизной, состоят в следующем:

1. На основе предложенных теоретических положений обоснована методология разработки и развития математических методов и моделей процессов управления промышленными предприятиями с использованием

общего подхода к изучению устойчивости выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок модели, разработаны отличающиеся от известных подходов общая схема устойчивости и принцип уравнивания погрешностей, выделены частные постановки проблем устойчивости, в том числе по отношению к изменению данных, их объемов и распределений, к временным характеристикам, обоснована необходимость разработки непараметрических статистических методов и методов анализа нечисловых данных, позволяющие ставить и решать конкретные задачи устойчивости (п.1.2 паспорта специальности 08.00.13 ВАК).

2. Для экономико-математических моделей процессов стратегического управления предприятиями на основе концепции устойчивости по отношению к временным характеристикам (моменту начала реализации проекта, горизонту планирования) получена новая характеризация моделей с дисконтированием, обосновано применение асимптотически оптимальных планов в условиях, отличающихся от известных, что позволяет проводить обоснованное построение и выбор экономико-математических методов и моделей при решении конкретных задач (п.1.4 паспорта специальности 08.00.13 ВАК).

3. Разработаны новые непараметрические (устойчивые к изменению распределения) статистические методы для решения конкретных задач управления промышленными предприятиями – для оценивания характеристик распределений данных, прогнозирования, сегментации рынка (проверки однородности независимых выборок) и др., найдены отличающиеся от известных условия применимости критериев Стьюдента и Вилкоксона, позволяющие проводить статистический анализ данных с произвольными функциями распределения (п.1.1 паспорта специальности 08.00.13 ВАК).

4. Развита статистическая теория в пространствах общей природы. В частности, предложены отличающиеся от известных способы введения эм-

пирических и теоретических средних, получены законы больших чисел для случайных элементов общей природы, установлено асимптотическое поведение решений экстремальных статистических задач, предложены и изучены непараметрические оценки плотности распределения вероятности, найдено асимптотическое распределение статистик интегрального типа. Статистика в пространствах произвольной природы основывается на систематическом использовании расстояний или мер близости (мер различия) между объектами нечисловой природы, что позволяет анализировать данные, являющиеся элементами нелинейных пространств (п.1.1 паспорта специальности 08.00.13 ВАК).

5. Развиты статистические методы моделирования и анализа конкретных типов объектов нечисловой природы. Установлены связи между различными видами объектов нечисловой природы, построены соответствующие вероятностные модели порождения нечисловых данных. Дана характеризация средних величин с помощью шкал измерения, указан способ сведения нечетких множеств к случайным, развиты методы проверки гипотез (согласованности, однородности, независимости) для бинарных данных (люсианов) в асимптотике растущей размерности, разработана асимптотическая статистика интервальных данных на основе понятий нотны и рационального объема выборки. Полученные научные результаты позволяют разрабатывать и обоснованно выбирать методы и модели анализа нечисловых данных конкретных типов в постановках, отличающихся от известных (п.1.1 паспорта специальности 08.00.13 ВАК).

6. Разработаны новые устойчивые экономико-математические методы и модели для решения ряда задач управления в функциональных областях производственно-хозяйственной деятельности предприятий и организаций, в частности, при использовании экспертных методов, в инновационном и инвестиционном менеджменте, при управлении качеством промышленной продукции, материальными ресурсами предприятия, рисками,

позволяющие модернизировать процессы управления предприятиями с целью их совершенствования (п.1.4 паспорта специальности 08.00.13 ВАК).

Практическая ценность. Полученные в диссертационной работе результаты, выводы и рекомендации, теоретические основы и методология развивают и дополняют возможности разработчиков экономико-математических методов и моделей, предназначенных для модернизации процессов управления предприятиями, в направлении изучения устойчивости таких методов и моделей по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей.

Результаты выполненных автором исследований и предложенные подходы могут быть использованы при проектировании и разработке технологий управления, систем информационно-аналитической поддержки процессов принятия решений при управлении конкретными предприятиями и интегрированными производственно-корпоративными системами.

Разработанные в диссертации методы и алгоритмы (прежде всего непараметрические статистические методы и методы анализа нечисловой информации, в том числе экспертных оценок, а также ориентированные на использование в функциональных областях производственно-хозяйственной деятельности предприятий) целесообразно включать в состав программного обеспечения систем автоматизированного управления предприятиями различных отраслей, а также использовать в учебном процессе, в частности, при обучении по направлению подготовки «Организация и управление наукоемкими производствами».

Апробация и реализация результатов исследований. Вошедшие в настоящую диссертацию работы доложены более чем на 50 научных конференциях, начиная с 1996 г., в том числе на международных научно-практических конференциях «Управление большими системами» (1997), «Предприятия России в транзитивной экономике» (2002), «Хозяйствующий субъект: новое экономическое состояние и развитие» (2003), «Теория активных систем» (2001, 2003, 2005, 2007), «Инновационное развитие экономики: теория и практика» (2005), «Управление инновациями» (2006, 2007, 2008), «Контролінг у бізнесі: теорія і практика» (Киев, 2008), «Математическая теория систем» (2009), XII международной научно-практической конференция «Управление организацией: диагностика, стратегия, эффективность» (2004), Второй (2003), Третьей (2006) и Четвертой (2009) международных конференциях по проблемам управления, Вторых и Третьих Друкеровских чтениях «Проблема человеческого капитала: теория и современная практика» и «Неформальные институты в современной экономике России» (2007), на Второй (1996), Третьей (1998, Первая международная) и Четвертой (2000, Вторая международная) всероссийских конференциях «Теория и практика экологического страхования», на всероссийских научных, научно-практических и научно-технических конференциях «Современный менеджмент в условиях становления рыночной экономики в России» (1998 г.), «Экономическая теория, прикладная экономика и хозяйственная практика: проблемы эффективного взаимодействия» (2006), Седьмом (2006), Восьмом (2007), Девятом (2008) и Десятом (2009) всероссийских симпозиумах «Стратегическое планирование и развитие предприятий» и др.

Проведена апробация полученных в диссертации научных результатов при решении конкретных задач повышения эффективности управления предприятиями. Практические положения диссертации реализованы на Московском заводе счетно-аналитических машин им. В.Д. Калмыкова, в ЗАО «Стинс Коман», НП «Объединение контроллеров», Лаборатории экономико-математических методов в контроллинге НУК ИБМ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Основные результаты исследования внедрены в учебный процесс МГТУ им. Н.Э. Баумана. На основе проведенных исследований разработана двухсеместровая учебная дисциплина «Организационно-экономическое моделирование» и соответствующий раздел Государственного образовательного стандарта по направлению подготовки 220700 (Организация и управление наукоемкими производствами), изданы учебники «Прикладная статистика», «Эконометрика», «Теория принятия решений», «Организационно-экономическое моделирование: Нечисловая статистика» и др. Реализация результатов диссертации подтверждена соответствующими актами внедрения.

Основные результаты исследования изложены в 12 монографиях, учебниках и учебных пособиях, 14 статьях в рецензируемых научных журналах списка ВАК по экономике, 13 статьях в рецензируемых научных журналах списка ВАК по иным направлениям (машиностроение, управление), указанных в автореферате. По теме диссертации опубликовано 124 печатных работ, указанных в списке использованной литературы, общим объемом 378,6 п.л., в том числе 285,3 п.л. написано лично соискателем. Вошедшие в настоящую диссертацию результаты широко представлены в Интернете (личный сайт автора «Высокие статистические технологии» http://orlovs.pp.ru/ в 2010 г. собрал 138054 посетителя из 105 стран).

В Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана в рамках научно-учебного комплекса «Инженерный бизнес и менеджмент» с 2006 г. под научным руководством автора действует Лаборатория экономико-математических методов в контроллинге. Её библиотека http://ibm.bmstu.ru/nil/biblio.html содержит в открытом доступе несколько десятков книг и статей автора и его сотрудников.

Конкретные вопросы, связанные с научной деятельностью автора и интересующими его проблемами, можно обсудить на общем форуме двух указанных сайтов http://forum.orlovs.pp.ru/ .

Автор является главным редактором электронного еженедельника «Эконометрика» http://subscribe.ru/catalog/science.humanity.econometrika , выходящего с 2000 г. (14 марта 2011 г. вышел выпуск 529).

Достаточно подробная информация о научной деятельности автора содержится в русской Википедии, в статье «Орлов, Александр Иванович (учёный)».

Научный коллектив, в рамках которого действует автор – это коллектив авторов статей в научных журналах «Заводская лаборатория. Диагностика материалов» (раздел «Математические методы исследования»), «Контроллинг», «Социология: методология, методы, математическое моделирование», «Управление большими системами». В редколлегии этих четырех журналов входит автор. Кроме того, достаточно много статей опубликовано в межвузовском сборнике научных трудов «Статистические методы оценивания и проверки гипотез», в журналах «Теория вероятностей и ее применения», «Экономика и математические методы».

Особенности научной карьеры. В начале своей научной деятельности, после окончания в 1971 г. механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.. Ломоносова, автор был математиком. Кандидатская диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук «Оценки скорости сходимости распределений статистик интегрального типа» была защищена в 1976 г. на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова по специальности «теория вероятностей и математическая статистика».

Затем от чистой математики интересы сдвинулись к прикладной математике, и в 1992 г. в Московском энергетическом институте в форме научного доклада на основе опубликованных работ была защищена диссертация «Разработка и исследование статистических методов моделирования и анализа объектов нечисловой природы» на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности «применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях (по отраслям наук)».

С 1993 г. автор работал профессором на экономических факультетах вузов, с 1997 г. – на кафедре «Экономика и организация производства» (основана в 1929 г.) Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (основан в 1830 г.). Были выполнены научные и прикладные работы по экономике, появилось желание получить их адекватную оценку со стороны профессиональных экономистов. В 2009 г. автор защитил в Московском государственном технологическом университете СТАНКИН (Московском Станкоинструментальном институте) диссертацию «Разработка и развитие устойчивых экономико-математических методов и моделей для модернизации управления предприятиями» на соискание ученой степени доктора экономических наук по специальности «Математические и инструментальные методы экономики».

Жанр настоящей работы – диссертация на соискание ученой степени доктора экономических наук, и при подготовке книжного издания автор не стал этого скрывать. Текст представляет собой в основном обзор работ автора за 1971-2009 гг., методологическое обоснование написано заново, приложение 1 публикуется впервые.

Благодарности. Автор благодарен всем коллегам, принявшим участие в обсуждении настоящей работы и ее составных частей.

Книга написана в традициях российской вероятностно-статистической научной школы. Начало современному этапу её развития положил академик АН СССР А.Н. Колмогоров, а в области математической статистики – член-корреспондент АН СССР Н.В. Смирнов. Автор искренне благодарен своим учителям - академику АН УССР Б.Г. Гнеденко, члену-корреспонденту АН СССР Л.Н. Большеву, проф. В.В. Налимову.

Выражаю признательность всему коллективу кафедры «Экономика и организация производства» и в целом научно-учебного комплекса «Инженерный бизнес и менеджмент» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Автор искренне признателен заведующему кафедрой «Экономика и организация производства» проф. С.Г. Фалько за постоянную поддержку проектов по разработке и внедрению организационно-экономических, эконометрических и статистических курсов, декану проф. И.Н. Омельченко и заведующему кафедрой «Промышленная логистика» проф. А.А. Колобову (1935-2010) за совместные научные исследования и обсуждения.

Автор благодарен своим многочисленным коллегам, слушателям и студентам, прежде всего различных образовательных структур Московского государственного технического университета им. Н.Э.Баумана и Московского физико-технического института. Особая благодарность – участникам научных конференций и семинаров, коллегам по работе в Лаборатории экономико-математических методов в контроллинге, Институте высоких статистических технологий и эконометрики МГТУ им. Н.Э. Баумана, Международной академии исследований будущего, Российской ассоциации статистических методов и Российской академии статистических методов.

Автор благодарен редактору Елене Фулга, всем сотрудникам издательства за поддержку нашего научного направления и большую работу по подготовке рукописи к изданию.

Глава 1. Анализ теории и практики применения экономико-математических методов и моделей при управлении предприятиями

1.1. Динамика развития народного хозяйства РФ

Чтобы провести обоснованный анализ современного состояния теории и практики применения математических методов и моделей процессов управления предприятиями и их объединениями, в том числе интегрированными производственно-корпоративными структурами [99, 257], рассмотрим динамику развития народного хозяйства РФ.

Данные Федеральной службы государственной статистики РФ (Росстата) (сайт http://www.gks.ru/, [260]) о выпуске ряда конкретных видов продукции (в натуральных единицах измерения) приведены в табл.1.1.

До полного восстановления промышленного потенциала, созданного в РСФСР к 1990 г., далеко. Приведенные в табл.1.1 данные иллюстрируют это, как и сводные показатели. Согласно «Ежегоднику экономического роста - 2007» Министерства промышленности и энергетики РФ [70], индекс восстановления, рассчитанный по 120 подотраслям промышленности, показывает, что промышленное производство в 2007 году составляло лишь около 80% от уровня 1990 года, при этом в машиностроении – лишь около 58%. Успешными являются лишь отрасли, в которых транснациональные корпорации усиленно развертывают в своих российских филиалах т.н. отверточную сборку (легковые автомобили, телевизоры). Некоторые подотрасли почти исчезли: производство фотоаппаратов, часов, мотоциклов составляет доли процента от уровня 1990 г. Обсуждение целесообразности ликвидации подобных подотраслей не входит в нашу задачу.

Подробнее рассмотрим динамику станкостроения [70] как системной составляющей технологической независимости нашей страны. Ограничимся последним годом перед мировым экономическим кризисом.

Таблица 1.1

Выпуск продукции в РФ в 1990 г. и 2007 г.

	2007	1990	2007 в % к 1990
Электроэнергия, млрд. кВтч	1016	1082	93,9
Уголь, добыча, млн. т	315	395	79,7
Нефть, добыча, млн. т	491	516	95,1
Газ, добыча, млрд. куб. м	651	641	101,4
Сталь, млн. т	72,4	90,4	80,1
Серная кислота, тыс. т	9652	12800	75,4
Цемент, млн. т	59,9	83,0	72,1
Бумага, тыс. т	4063	5240	77,5
Турбины всех видов, тыс. кВт	6110	13200	46,3
Тракторы, всех видов, тыс. штук	8,6	214	4,0
Металлорежущие станки, тыс. штук	5,02	74,2	6,7
Металлорежущие станки с числовым программным управлением, штук	334	6300	5,3
Кузнечнопрессовые машины, штук	2592	27300	9,4
Машины стиральные, тыс. штук	2708	5419	49,9
Холодильники и морозильники бытовые, тыс. штук	3573	3774	94,6
Телевизоры, тыс. штук	6154	4717	130
Фотоаппараты, тыс. штук	1,5	1856	0,08
Грузовые автомобили, тыс. штук	286	665	36,8
Легковые автомобили, тыс. штук	1290	1103	106,5
Средства вычислительной техники, млрд. руб.	14,5	144 *	10,1
Ткани, х/б, млн. кв. м	2143	5624	38,1
Обувь, млн. пар	50,8	385	13,1

* (2,4х60) (пересчитано из расчета 1 руб. 1990 г. = 60 руб. 2007 г.)

Если в 1990 году в стране производилось более 100 тысяч единиц металлообрабатывающих станков и кузнечнопрессового оборудования, то в 2006 году — всего 5 тысяч единиц. В 2005 году промышленность РФ произвела 4797 металлорежущих, 4277 деревообрабатывающих станков и 1503 единицы кузнечнопрессового оборудования на общую сумму 161 миллион долларов. А всего в мире в этот период обрабатывающего оборудования выпустили на 51,8 миллиарда долларов США. Доля России в мировом производстве станков упала до 0,3%.

В 1990 году в РСФСР был произведен 16741 станок с числовым программным управлением. В 2007 году таких станков было изготовлено всего 334 единицы (в 51 раз меньше). В 1990 году станкостроители изготовили 556 автоматических и полуавтоматических линий для машиностроения и металлообработки, а в 2007 году —5.

В 1990 году в машиностроении и металлообработке работали 5252 завода. В отрасли было занято 9 миллионов 652 тысячи работников. В среднем на предприятии трудилось по 1840 человек. На конец 2007 г. в стране РФ официально зарегистрировано 50340 машиностроительных предприятия, в среднем на каждом из них работают по 84 человека.

На основе данных Росстата констатируем (табл. 1.2), что основные макроэкономические показатели РФ - валовой внутренний продукт, объемы промышленного производства и инвестиций в основные фонды – уменьшились к 1998 г. (в сопоставимых ценах) до 55,7%, 45,3% и 21% соответственно от уровня 1990 г. После чего начался экономический рост, и к началу 2008 г. эти показатели достигли 98,2%, 80% и 58,6% соответственно от уровня 1990 г. Резко возрос физический и моральный износ основных фондов. Предстоит их кардинально обновить. Для решения возникающих при этом проблем повышения эффективности процессов управления промышленными предприятиями (в частности, проблем прогнозирования, стратегического планирования, управления инновациями и инвестициями) на основе адекватных экономико-математических методов и моделей необходима разработка теоретических основ и методологии таких методов и моделей.

Таблица 1.2

Динамика основных макроэкономических показателей России (относительные показатели на основе сопоставимых цен)

Год	Валовой внутренний продукт		Объем промышленной продукции		Капитальные вложения в основные фонды	
	% к предыдущему году	% к 1990 году	% к предыдущему году	% к 1990 году	% к предыдущему году	% к 1990 году
1991	95,0	95,0	92,0	92,0	85,0	85,0
1992	85,5	81,0	82,0	75,4	60,0	51,0
1993	91,3	74,0	85,9	64,8	88,0	44,9
1994	87,3	64,7	79,1	51,3	76,0	34,1
1995	95,8	62,0	96,3	49,4	90,0	30,7
1996	94,0	58,3	95,0	46,9	82,0	25,2
1997	100,4	58,5	101,9	47,8	95,0	23,9
1998	95,1	55,7	94,8	45,3	88,0	21,0
1999	104,6	58,2	111,0	50,3	105,3	22,2
2000	109,9	64,0	111,9	56,3	117,4	26,0
2001	105,0	67,2	104,9	59,1	108,7	28,3
2002	104,3	70,1	102,6	60,6	109,9	31,1
2003	107,3	75,2	107,0	65,6	112,5	35,0
2004	106,8	80,3	106,2	69,7	110,8	38,8
2005	106,4	85,4	104,0	72,5	109,9	42,6
2006	106,7	91,1	103,9	75,3	113,7	48,4
2007	108,1	98,5	106,3	80,0	121,1	58,6
2008	105,8	104,2	102,1	81,7	109,1	63,9

Примечание. Таблица 1.2 составлена по данным официальных изданий Росстата (ранее - Госкомстата РФ) и расчетам А.И. Орлова [207, 213].

Мировой экономический кризис, докатившийся до России во второй половине 2008 г., усугубил отрицательные черты экономической ситуации. Актуальность перехода на инновационный путь развития возросла. Для обеспечения такого перехода необходима разработка и внедрение современных устойчивых экономико-математических методов и моделей.

1.2. Базовая организационно-экономическая модель промышленного предприятия

В основу диссертационного исследования положена идея разработки, исследования и использования устойчивых математических моделей и методов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей. Устойчивость - важное свойства экономико-математических моделей и методов (ЭММиМ). Польза полученных общих результатов демонстрируется на примерах, относящихся к процессам управления промышленными предприятиями, а также организациями иных сфер деятельности. Чтобы обосновать спектр процессов управления, которые рассматриваются в диссертации, на основе анализа литературных источников и опыта практической деятельности выявим базовую организационно-экономическую модель промышленного предприятия. На ее основе разработаем конкретные модели процессов управления предприятиями и их объединениями и ЭММиМ, предназначенные для повышения эффективности процессов управления промышленными предприятиями.

Для успешного использования ЭММиМ с целью повышения эффективности процессов управления промышленными предприятиями, казалось бы, необходимо рассмотреть промышленное предприятие как систему, выделить составляющие систему элементы и связи между ними. Т.е. исходить из организационной структуры предприятия. На практике используют различные управленческие структуры (см., например, [257, гл.1]). Однако отсутствуют типовые структуры. В одни и те же термины вкладывают разное содержание. Например, на одном предприятии главный инженер руководит всей технической стороной деятельности завода, в том числе всеми цехами. На другом цехами занимается начальник производства, а главный инженер отвечает лишь за вспомогательные службы. В одном случае лаборатория (например, центральная заводская лаборатория на крупном металлургическом предприятии численностью в 2 тыс. сотрудников) делится на отделы, а отделы – на отделения. В другом, наоборот, лаборатории объединяются в отделы, а отделы – в отделения. Управленческие структуры и их названия носят на себе отпечатки создавших их менеджеров и событий истории предприятия.

Поэтому исходим не из элементов организационной структуры, а из реализуемых на предприятии процессов управления, видов деятельности, в том числе процессов реализации тех или иных функций. Процессы управления с учетом трудоемкости их осуществления группируются по элементам организационной структуры, которая может иметь матричный вид. Другими словами, процессы управления первичны, организационная структура вторична.

Необходимо определить используемые термины. Не претендуя на оригинальность, приведем энциклопедические формулировки.

Метод (от греч. μέθοδος — «путь сквозь») — систематизированная совокупность шагов, которые необходимо предпринять, чтобы выполнить определенную задачу или достичь определенной цели. Также методом называют способ постижения истины. Систематизированная совокупность шагов обычно оформляется в виде нормативно-методического документа (методических указаний, инструкции и т.п.) или алгоритма, включенного в корпоративную информационную систему (программный продукт). Метод разрабатывают на основе той или иной организационно-экономической модели (хотя для формального применения метода знание модели не всегда необходимо).

Термин м**оде́ль** (фр. *Modèle*) происходит от латинского слова *modulus* — мера, образец. В общем случае, модель - это объект, в достаточной степени повторяющий свойства моделируемого объекта (прототипа)), существенные для целей конкретного моделирования, и опускающий несущественные свойства, в которых он может отличаться от прототипа. Модель — любой образ, аналог (мысленный или условный: изображение, описание, схема, чертеж, график, карта и т. п.) какого-либо объекта, процесса или явления («оригинала» данной модели).

Модель в общем смысле (обобщенная модель) есть создаваемый с целью получения и (или) хранения информации специфический объект (в форме мысленного образа, описания знаковыми средствами либо материальной системы), отражающий свойства, характеристики и связи объекта-оригинала произвольной природы, существенные для задачи, решаемой субъектом [158, с.44]. Полезны модели, которые выражаются словами, а также формулами, алгоритмами и иными математическими средствами. Часто используют графические средства - чертежи, диаграммы, блок-схемы.

В организационно-экономической модели выражены знания и представления о конкретном процессе управления, предназначенные для выработки метода решения той или иной задачи. Зачастую такая модель формулируется в математических терминах (и тогда ее называют экономико-математической). Однако нельзя относить ее к математике, поскольку цели ее разработки, изучения и применения лежат вне математики. Математика – это лишь инструмент, язык, на котором выражаются интересующие исследователя свойства.

Перейдем к описанию процессов управления промышленным предприятием. Для рациональной работы предприятия необходима организация основного процесса производства, средств производства, труда, инструментального производства, ремонтного хозяйства, технической подготовки производства, транспортного, энергетического и складского хозяйства, службы программно-математического и компьютерно-информационного обеспечения [315, с.6].

На машиностроительных предприятиях можно выделить три существенно отличных вида процессов - производственные процессы, инновационные процессы и процессы функционального обслуживания производственных и инновационных процессов. При этом производственные процессы разделяют на основные (технологические), вспомогательные и обслуживающие. В инновационных процессах выделяют процессы исследования и изобретательства и процессы подготовки производства. К процессам функционального обслуживания относят материально-техническое снабжение, сбыт, планирование, учет, нормирование, финансовое обеспечение, подготовку кадров и др. [164, с.9-10].

Около 100 лет назад в качестве основных функций менеджмента А. Файоль выделил прогнозирование и планирование, проектирование организационных структур, руководство командой (распорядительство), координацию, контроль [313, 314]. Тогда основное внимание уделялось научной организации производства. Позже в связи с ускоряющимися темпами научно-технического прогресса возникла необходимость управления инновационным развитием и инвестициями. Возросшее внимание к предпочтениям потребителей выразилось в развитии маркетинговых исследований. Логистико-ориентированное проектирование бизнеса предполагает разработку организационно-экономических методов и моделей управления материальными ресурсами предприятия. Требованием времени является сертификация предприятий на соответствие стандартам ИСО 9000 по менеджменту качества и ИСО 14000 по экологическому менеджменту. Перспективы развития контроллинга – системы информационно-аналитической и методической поддержки менеджмента – рассмотрены в [316].

В последние годы в промышленно развитых странах всё большее внимание уделяется управлению рисками, появляются соответствующие национальные стандарты [353]. Можно ожидать, что в недалеком будущем среди топ-менеджеров появятся директора по рискам, возглавляющие соответствующие интегрированные службы.

Все сказанное выше задает словесную модель промышленного предприятия и предопределяет спектр процессов управления, которые рассматриваются в настоящем исследовании. Такие виды деятельности, как прогнозирование, планирование, управление рисками, пронизывают практически все управленческие процессы.

В диссертации проведена разработка ряда ЭММиМ для таких функциональных областях управленческой деятельности промышленного предприятия, как контроллинг, управление инновациями, управление инвестициями, менеджмент качества продукции, экологический менеджмент, маркетинговые исследования, управление материальными ресурсами.

1.3. Классификации экономико-математических методов и моделей управления предприятиями и организациями

Для описания и анализа ЭММиМ необходимы их классификации. Теория классификации – большая область междисциплинарных знаний (см., например, [179, 202]), в настоящем разделе она затрагивается лишь в той мере, в которой необходима для решения задач настоящего исследования.

Базовые классификации. Для решения практических задач используются различные классификации. Сначала выделим пять оснований для классификации ЭММиМ.

1. Способы получения данных – объективные (результаты наблюдений, измерений, испытаний, анализов, опытов, данные учета или статистической отчетности) и субъективные (экспертные оценки, субъективные мнения опрошенных потребителей или респондентов иных видов).

2. Способы описания неопределенности (вероятностно-статистические, нечеткие, интервальные).

3. Значение оптимизационных постановок в ЭММиМ (большое, малое).

4. Роль фактора времени (большая, малая).

5. Наличие конфликтов между экономическими агентами (есть, нет).

По первому основанию, в частности, в отдельную область выделяются экспертные технологии разработки управленческих решений. По второму - вероятностно-статистические модели и методы анализа данных, а также нечеткие и интервальные модели. По третьему – модели математического программирования (линейного, целочисленного, дискретного). По четвертому – модели динамики, в том числе описываемые с помощью разностных или дифференциальных уравнений. По пятому – теория игр (теория конфликтных ситуаций). Большое значение имеют комбинированные модели разработки управленческих решений. Отметим некоторую условность описанного выше деления. Так, иногда ответ эксперта рассматривают как результат измерения с ошибкой, т.е. эксперта рассматривают как средство измерения [183].

Внутри каждой из названных областей – своя классификация. Так, для экспертных оценок выделяем такие основания: цель экспертизы, число туров, порядок вовлечения экспертов, организация общения экспертов, веса экспертов [213] (подробнее см. в разделе 5.1).

Введенная нами классификация областей прикладной статистики по виду статистических данных [203, 210] приведена в табл.1.3. Развитию статистики объектов нечисловой природы посвящена глава 4 настоящей работы.

Для классификации ЭММиМ в конкретных функциональных областях деятельности предприятия используют подходы, соответствующие рассматриваемой области. Приведем пример.

Таблица 1.3

Области прикладной статистики

№ п/п	Вид статистических данных	Область прикладной статистики
1	Числа	Статистика (случайных) величин
2	Конечномерные вектора	Многомерный статистический анализ
3	Функции	Статистика случайных процессов и временных рядов
4	Объекты нечисловой природы	Статистика нечисловых данных (статистика объектов нечисловой природы)

Классификация статистических методов управления качеством продукции. Рассмотрим два основания для классификации. Первый - по виду статистических методов. Второй - по этапам жизненного цикла продукции, на которых соответствующий метод применяется. Первое основание привычно для специалистов по разработке статистических методов и соответствующего программного обеспечения, второе - для тех, кто эти методы применяет на конкретных предприятиях.

В Центре статистических методов и информатики (ЦСМИ, директор – А.И. Орлов) мы использовали пятичленное деление по первому основанию (в скобках указаны наименования программных продуктов (диалоговых систем), разработанных в ЦСМИ и рассмотренных, в частности, в [182, 186]):

а) прикладная статистика - иногда с дальнейшим выделением статистики случайных величин, многомерного статистического анализа, статистики случайных процессов и временных рядов, статистики объектов нечисловой природы (Система Регрессионного Статистического Моделирования СРСМ, или СТАТМАСТЕР; АДДА, ГРАНТ, КЛАМС, ЭКОНОМЕТРИК, РЕГРЕССИЯ, ЛИСАТИС, ЭКОСТАТ, РЕСТ);

б) статистический приемочный контроль (СПК, АТСТАТ-ПРП, КОМПЛАН);

в) статистическое регулирование технологических процессов, в частности, методом контрольных карт [135, 138] (СТАТКОН, АВРОРА-РС);

г) планирование эксперимента (ПЛАН, ЭКСПЛАН, ПАСЭК, ПЛАНЭКС);

д) надежность и испытания (НАДИС, ОРИОН, СЕНС).

Перейдем ко второму основанию классификации статистических методов управления качеством продукции. Согласно п.5.1 «Петля качества» стандарта ИСО 9004 «Общее руководство качеством и элементы системы качества. Руководящие указания» система качества функционирует «... одновременно со всеми остальными видами деятельности, влияющими на качество продукции или услуг, и взаимодействует с ними. Ее воздействие распространяется на все этапы от первоначального определения и до конечного удовлетворения требований и потребностей потребителя. Эти этапы и виды деятельности включают:

1) маркетинг, поиски и изучение рынка;

2) проектирование и/или разработку технических требований, разработку продукции (опытного образца);

3) поиски поставщиков и оптовых покупателей, организацию материально-технического снабжения (решение задач логистики);

4) подготовку и разработку производственных (технологических) процессов;

5) непосредственно производство продукции;

6) контроль качества продукции, проведение испытаний и обследований;

7) упаковку и хранение продукции;

8) реализацию (сбыт) и распределение (доставку) продукции;

9) монтаж и эксплуатацию продукции у потребителей;

10) технические помощь и обслуживание;

11) утилизацию после использования».

Схематическое представление элементов системы качества дано на рис.1.1.

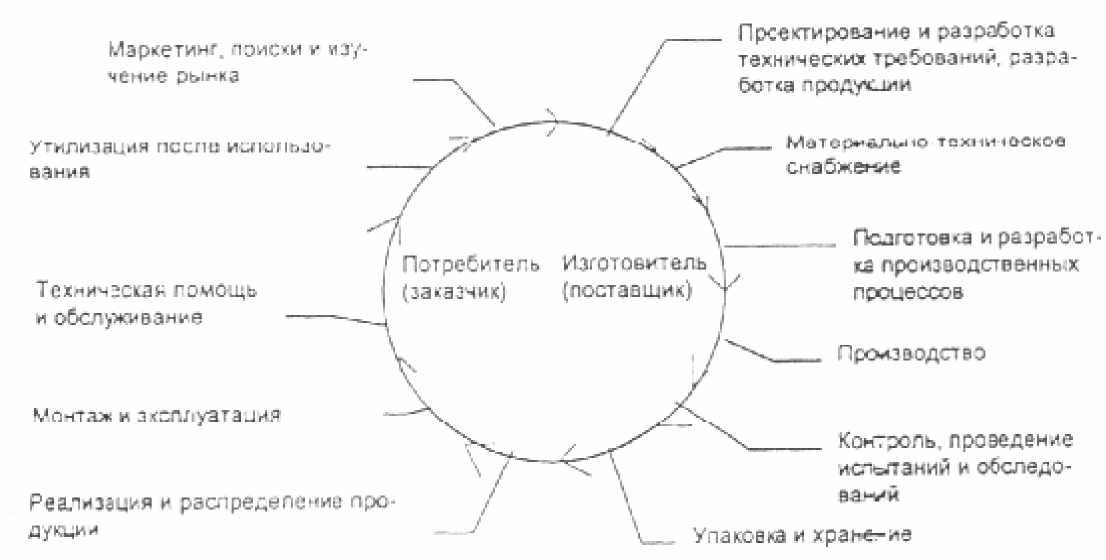


Рис. 1.1. Петля качества

Подробное рассмотрение применения основных типов статистических методов на перечисленных этапах жизненного пути продукции не входит в задачу настоящей книги. Сводка, приведенная в табл. 1.4, показывает, что статистические методы широко применяются на всех этапах жизненного пути продукции. Более подробная классификация задач управления промышленным предприятием, для решения которых необходимо применение ЭММиМ, дана в Приложении 1 к настоящей работе.

Помимо компьютерных диалоговых систем широкого назначения, на каждом конкретном предприятии и на любом конкретном этапе жизненного пути продукции могут быть использованы специальные модели, например, на этапе 3 «материально-техническое снабжение» - модели управления запасами (см. о них, например, [22, 216] и главу 5 [170], а также раздел 5.5 ниже).

Среди диалоговых систем по статистическому анализу выделим пакеты, ориентированные на восстановление зависимостей (СТАТМАСТЕР, он же СРСМ - Система Регрессионного Статистического Моделирования, и его развитие ЭКОНОМЕТРИК, а также РЕГРЕССИЯ), анализ нечисловых данных на основе методов статистики объектов нечисловой природы (АДДА, КЛАМС, а также ориентированный на экспертное оценивание ГРАНТ, на анализ интервальных данных РЕСТ), прогнозирование (ЛИСАТИС и его развитие ЭКОСТАТ, а также относящиеся к временным рядам разделы пакета АВРОРА-РС - Анализ Временных Рядов и Обнаружение РАзладки).

Таблица 1.4

Применение статистических методов на различных этапах жизненного цикла продукции (ЖЦП)

Номер этапа ЖЦП	Вид статистических методов					Специальные модели
	а	б	в	г	д	
1	+	-	-	+	-	+
2	+	-	-	+	+	+
3	+	-	-	-	-	+
4	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	-	+
6	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+

8	+	+	-	-	-	+
9	+	+	+	+	+	+
10	+	-	-	-	-	+
11	+	+	+	+	-	+

Для регулярного решения обширных комплексов задач сертификации и управления качеством на конкретном предприятии в ряде случаев целесообразно создать программный продукт (диалоговую систему как часть КИС), предназначенную для использования именно на этом предприятии. В частности, для решения задач этапа 4 используют созданные для конкретного предприятия программные системы, соединяющие в себе банки данных и пакеты статистических методов анализа этих данных. Примерами являются «Автоматизированное рабочее место материаловеда (АРМ материаловеда)» и «Автоматизированное рабочее место математика (АРМ математика)», разработанные под нашим руководством Центром статистических методов и информатики для ВНИИ эластомерных материалов и изделий.

На всех этапах жизненного цикла продукции, особенно на этапах 3, 8, 10, часто используют специализированные вероятностно-статистические модели, в том числе модели управления запасами (см., например, монографию [170, гл.5]), массового обслуживания [48], надежности [47] и др. Такие модели и их программное обеспечение, как правило, разрабатываются для конкретного предприятия и потому хорошо приспособлены к особенностям этого предприятия.

Экономико-математическое моделирование как область научно-практической деятельности. Моделирование экономических явлений и процессов с целью обеспечения принятия решений - область научно-практической деятельности, получившая мощный стимул к развитию во время и сразу после второй мировой войны. Эта тематика развивалась в рамках интеллектуального движения, связанного с терминами «кибернетика» (в нашей стране для ее развития много сделал Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика»), «исследование операций», а позже - «системный анализ», «информатика» [12, 13, 30].

Одна из практических задач - контроль качества боеприпасов, вышедшая на первый план именно в годы второй мировой войны. Методы статистического контроля качества приносят (по западной оценке, обсуждаемой в [46], и по нашему мнению, основанному на опыте СССР и России, в частности, на анализе результатов работы служб технического контроля на промышленных предприятиях) наибольший экономический эффект среди всех экономико-математических методов принятия решений. Только дополнительный доход от их применения в промышленности США оценивается как 0,8% валового национального продукта США [39, 184].

Экономико-математические модели делим на управляемые и прогнозные. Управляемые модели отвечают на вопрос: «Что будет, если ...?»; «Как достичь желаемого?», и содержат три группы переменных: 1) переменные, характеризующие текущее состояние объекта; 2) управляющие воздействия - переменные, влияющие на изменение этого состояния и поддающиеся целенаправленному выбору; 3) исходные данные и внешние воздействия, т.е. параметры, задаваемые извне, и начальные параметры.

В прогнозных моделях управление не выделено явно. Они отвечают на вопросы: «Что будет, если все останется по-старому?»

Далее, модели делим по способу измерения времени на непрерывные и дискретные. Если в модели присутствует время, то модель называется динамической. Чаще всего в моделях используется дискретное время, т.к. информация поступает дискретно: отчеты, балансы и иные документы составляются периодически. Но с формальной точки зрения непрерывная модель может оказаться более простой для изучения.

Обычно в достаточно крупные социально-экономические модели входят материальный, финансовый и социальный разделы.

При построении моделей, использующих дискретное время, часто применяют методы эконометрики (см. [200]). Среди них популярны регрессионные уравнения и их системы. Различные системы регрессионных уравнений, построенные для решения практически важных задач, рассмотрены в [155]. Часто используют лаги (запаздывания в реакции). Для систем, нелинейных по параметрам, применение метода наименьших квадратов встречает трудности [200].

Введение в проблемы построения экономико-математических моделей, особенно ориентированных на практическое использование в задачах принятия решений, т.е. организационно-экономических моделей, дают книги Н.Н.Моисеева [141] и В.А. Лотова [123]. Общие проблемы математического моделирования экономических явлений и систем рассматриваются в монографиях Н.П.Бусленко [27], Дж.Кемени и Дж.Снелла [88], Н.Н.Моисеева [142, 143], Дж. фон Неймана и О. Моргенштейна [156], в [111, 127, 163] и др. Имеется большое число сборников научных статей, посвященных математическим моделям в экономике. Отметим большое практическое значение ЭММиМ в области экономики предприятия (инженерной экономики) [92, 302, 324, 340, 357, 358, 360, 385], моделей логистики, в частности, управления запасами [170, 271]. В последние годы интерес вызывает моделирование финансового рынка.

Важная проблема - учет неопределенности в вероятностно-статистических, нечетких, интервальных моделях экономических и социально-экономических явлений и процессов. Проблемы устойчивости (к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок модели) для социально-экономических моделей рассматриваются в [170, 213, 216].

Имитационное моделирование (*simulation modelling*) широко применяется в различных областях, в том числе в экономике [155]. Наиболее перспективными представляются синтез экспертных систем и математических моделей, впервые осуществленный в нашей стране еще в 70-е годы [3], и теория управления организационными системами [25, 26, 57].

При построении, изучении и применении экономико-математических моделей принятия решений используются различные математические методы. Их делим на несколько групп:

- методы оптимизации,
- - методы, учитывающие неопределенность, прежде всего вероятностно-статистические, а также нечеткие и интервальные,
- методы построения и анализа имитационных моделей,
- методы анализа конфликтных ситуаций (теории игр), и др.

Во всех этих группах можно выделить статическую и динамическую постановки. При наличии фактора времени используют дифференциальные уравнения и разностные методы.

Кратко рассмотрим перечисленные группы методов по отдельности.

Методы оптимизации. Со времен классических работ [82, 83, 84] нобелевского лауреата по экономике академика АН СССР Л.В.Канторовича один из основных классов экономико-математических методов - это методы оптимизации. Оптимальному управлению на основе экономико-математических моделей посвящена обширная литература [7, 80, 109, 350], в ней используются такие термины, как оптимальное программирование и оптимальное планирование. В случае одного критерия принципиальных сложностей нет - применяют диалоговые компьютерные системы. Сложные проблемы - это выбор целевых функций [40], оценка устойчивости принципов оптимальности [170], многокритериальность [252]. Для построения моделей с целью принятия решений используют теорию полезности [322].

Вероятностно-статистические модели. Исходная научная база таких моделей - теория вероятностей и математическая статистика. Выделяют как самостоятельное направление прикладную статистику. Она включает в себя прикладную математическую статистику, ее программное обеспечение и методы сбора статистических данных и интерпретации результатов расчетов. Только первая из этих трех областей одновременно входит и в математическую статистику. Последняя включает в себя также чисто математическую область, в которой статистические структуры рассматриваются как математические объекты. Они изучаются с внутриматематическими целями. Эту область научных исследований в ряде публикаций называют «аналитической статистикой» (от математических терминов «математический анализ», «аналитические функции» и т.п.). Таким образом, математическая статистика состоит из прикладной математической статистики, ориентированной на практическое применение, и ветви чистой математики под названием «аналитическая статистика», полезность которой для применений не подтверждена. Статистические методы активно применяются в различных областях экономики [386], причем в России - уже более 150 лет. Как известно, эконометрика (или эконометрия) - это статистические методы анализа эмпирических экономических данных [200]. Однако в нашей стране до середины 1990-х годов этот термин употреблялся почти исключительно в переводной литературе [33, 43, 62, 63, 76, 129, 264, 304, 323].

Имеются многочисленные публикации по различным конкретным разделам прикладной статистики и эконометрики:

- по регрессионному анализу (методам восстановления зависимости и построения моделей, прежде всего линейных);

- по планированию эксперимента;

- по методам классификации (дискриминантного анализа, кластер-анализа, автоматической классификации, распознавания образов, систематики и типологии, теории группировок);

- по многомерному статистическому анализу экономической информации;

- по методам анализа и прогнозирования временных рядов;

- по теории робастности (robustness), т.е. устойчивости статистических процедур к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок модели [170, 200],

- по использованию различных индексов [5], в частности, индекса инфляции [200].

Основной журнал в России, в котором публикуются исследования по прикладной статистике и особенно по планированию эксперимента - это «Заводская лаборатория» (секция «Математические методы исследования»).

С 1970-х годов все большее значение приобретает область статистических методов, посвященная анализу статистических данных нечисловой природы, т.е. результатов измерений по качественным и разнотипным признакам; бинарных отношений (ранжировок, разбиений (классификаций), толерантностей и др.); результатов парных сравнений; векторов из 0 и 1 (люсианов); множеств, нечетких множеств; текстов; как обобщение - элементов пространств произвольной природы, в которых нет линейной структуры, но есть метрика или показатель различия [200]. Сводка основных подходов и результатов статистики объектов нечисловой природы, или статистики нечисловых данных, дана в монографиях [4, 170, 171, 200], сборнике статей [9].

Большое значение для развития статистики объектов нечисловой природы в России имела монография Дж. Кемени и Дж.Снелла [88] и работы по теории измерений [262, 266]. В применении к теории средних удалось установить вид средних величин, адекватных тем или иным шкалам измерения [170, 213], что имеет отношение также к социально-экономическим исследованиям, в частности, к теории рейтингов (см. раздел 2.3). Теория измерений применялась в социологии (Ю.Н. Толстова [306]) и других областях.

Одно из основных применений статистики объектов нечисловой природы - теория и практика экспертных оценок, связанные с теорией статистических решений [14, 125, 332] и проблемами голосования.

Большое значение придается различным способам описания неопределенности. Традиционное вероятностно-статистическое описание с интуитивной точки зрения применимо лишь к массовым событиям. Для единичных событий целесообразно применять теорию субъективных вероятностей и теорию нечетких множеств (*fuzzy sets*). которая развивалась ее основателем Л. Заде для описания суждений человека, для которого переход от «принадлежности» к множеству к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен. Первой монографией российского автора по теории нечеткости была наша книга [171]. По теории нечеткости сейчас уже имеется большое число публикаций. Давно обсуждаются связи между теорией нечеткости и теорией вероятностей. Нами [170, 171] доказано, что теория нечетких множеств в определенном смысле сводится к теории случайных множеств.

В 1980-е годы стала развиваться интервальная статистика [35, 36, 200, 210, 213] - часть статистики нечетких данных, в которой функция принадлежности, описывающая размытость, принимает значение 1 на некотором интервале, а вне его - значение 0. Другими словами, исходные данные, в том числе элементы выборки, - не числа, а интервалы. Интервальная статистика связана с интервальной математикой, в частности, с интервальной оптимизацией.

Теория конфликтных ситуаций (теория игр). Теория игр (теория конфликта, теория конфликтных ситуаций) зародилась как теория рационального поведения двух игроков с противоположными интересами. Она наиболее проста, когда каждый из них стремится максимизировать свой средний выигрыш. Это предположение излишне упрощает реальное поведение в ситуации конфликта. Участники конфликта могут оценивать свой риск по иным критериям. В случае нескольких игроков возможны коалиции. Большое значение имеет устойчивость точек равновесия и коалиций. В экономике еще 150 лет назад теория дуополии (конкуренции двух фирм) О.Курно была развита на основе соображений, которые сейчас относим к теории игр. Новый толчок дан классической монографией Дж. фон Неймана и О. Моргенштейна [156], вышедшей вскоре после второй мировой войны. В литературе часто разбирается «дилемма заключенного» и точка равновесия по Нэшу. По теории игр имеется обширная литература, однако в практической работе она обычно выступает как часть более широкого подхода, ассоциированного с терминами «принятие решений» [14, 125], «конфликтная ситуация» [276].

Таблица 1.5

Этапы развития прикладной статистики

№	Этапы	Характерные черты	Годы
1	Описательная статистика	Тексты, таблицы, графики. Отдельные расчетные приемы (МНК)	До 1990
2	Параметрическая статистика	Модели параметрических семейств распределений – нормальных, гамма и др. Теория оценивания параметров и проверки гипотез	1900 - 1933
3	Непараметрическая статистика	Произвольные непрерывные распределения. Непараметрические методы оценивания и проверки гипотез	1933 - 1979
4	Нечисловая статистика	Выборка – из элементов произвольных пространств. Использование показателей различия и расстояний	С 1979

Проанализируем основные математические средства, используемые при разработке ЭММиМ.

Вероятностно-статистические модели и методы анализа данных. С целью оценки перспективности применения тех или иных ЭММиМ нами выделены [187] основные этапы развития прикладной статистики (табл. 1.5). В правом столбце указаны годы, когда соответствующий этап находился на переднем крае научных исследований. В настоящее время продолжаются исследования на основе подходов всех четырех этапов.

В многообразии ЭММиМ выделяем как самостоятельную область нечисловую статистику (известна также как статистика объектов нечисловой природы, статистика нечисловых данных). Примерами объектов нечисловой природы являются значения качественных признаков, т.е. результаты кодировки объектов с помощью заданного перечня категорий (градаций); упорядочения (ранжировки) экспертами образцов продукции (при оценке её технического уровня и конкурентоспособности)) или заявок на проведение научных работ (при проведении конкурсов на выделение грантов); классификации, т.е. разбиения объектов на группы сходных между собой (кластеры); толерантности, т.е. бинарные отношения, описывающие сходство объектов между собой, например, сходство организационных структур промышленных предприятий; результаты парных сравнений или контроля качества продукции по альтернативному признаку («годен» - «брак»), т.е. последовательности из 0 и 1; множества (обычные или нечеткие), например, перечни рекомендуемых к осуществлению инновационных проектов, составленные экспертами независимо друг от друга; слова, предложения, тексты; вектора, координаты которых - совокупность значений разнотипных признаков, например, результат составления отчета о деятельности промышленного предприятия или анкета эксперта, в которой ответы на часть вопросов носят качественный характер, а на часть - количественный; ответы на вопросы экспертной, маркетинговой или социологической анкеты, часть из которых носит количественный характер (возможно, интервальный), часть сводится к выбору одной из нескольких подсказок, а часть представляет собой тексты; и т.д. Интервальные данные тоже можно рассматривать как пример объектов нечисловой природы, а именно, как частный случай нечетких множеств: если характеристическая функция нечеткого множества равна 1 на некотором интервале и равна 0 вне этого интервала, то задание нечеткого множества эквивалентно заданию интервала.

С 1970-х годов в основном на основе запросов теории экспертных оценок (а также технических исследований, экономики, социологии и медицины) развивались конкретные направления статистики объектов нечисловой природы. Были установлены основные связи между конкретными видами таких объектов, разработаны для них базовые вероятностные модели. Следующий этап (1980-е годы) - выделение статистики объектов нечисловой природы в качестве самостоятельной дисциплины, ядром которого являются методы статистического анализа данных произвольной природы [175]. Для работ этого периода характерна сосредоточенность на внутренних проблемах нечисловой статистики. К 1990-м годам статистика объектов нечисловой природы с теоретической точки зрения была достаточно хорошо развита, основные идеи, подходы и методы были разработаны и изучены математически, в частности, доказано достаточно много теорем. Однако она оставалась недостаточно апробированной на практике. И в 1990-е годы наступило время перейти от математико-статистических исследований к применению полученных результатов на практике. Следует отметить, что в статистике объектов нечисловой природы одна и та же математическая схема может с успехом применяться во многих областях, а потому ее лучше всего формулировать и изучать в наиболее общем виде, для объектов произвольной природы. Нечисловой статистике посвящена глава 4 настоящей работы.

Концепции нечеткости и интервальности. Описание неопределенностей организационно-экономических явлений и процессов может проводиться также с помощью концепций нечеткости и интервальности. Разработаны методы сбора нечетких данных и их анализа, в том числе статистического, для решения задач повышения эффективности управления предприятием, в частности, при контроллинге инноваций. Принципиально важным с методологической точки зрения является сведение теории нечеткости к теории случайных множеств, оно показывает, что между разные способы описания неопределенностей связаны между собой. Цикл соответствующих теорем приведен в работах [170, 200, 210].

В качестве примеров успешного применения концепции нечеткости для решения задач экономики и управления в промышленности укажем на книги С.А. Смоляка [295] и А.С. Птускина [263], кандидатские диссертации и статьи Н.С. Загоновой [73] и С.В. Клементьевой [91].

В организационно-экономических моделях и основанных на них методах зачастую приходится рассматривать в качестве элементов выборки не числа, а интервалы («от» и «до»). Это приводит к алгоритмам и выводам, принципиально отличающимся от классических.

Пусть существо реального явления описывается выборкой x_1 , x_2 , ..., x_n . Анализ реальных задач повышения эффективности управления промышленными предприятиями показывает, что исследователю известна отнюдь не выборка x_1 , x_2 , ..., x_n , а величины $y_j = x_j + \varepsilon_j$, $j = 1, 2, \ldots , n$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ – некоторые погрешности рассматриваемых наблюдений, измерений, анализов, опытов, испытаний, исследований. Обозначим $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n), \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$. Пусть организационно-экономические выводы основываются на функции $f : R^n \to R^1$, используемой для оценивания параметров и характеристик распределения, проверки гипотез и решения иных задач. Принципиально важная идея такова: *экономист, менеджер, инженер знает только f(y), но не f(x).* В алгоритмах расчетов необходимо отразить различие между $f(y)$ и $f(x)$.

Принципиально важно, что неопределенность можно моделировать по-разному:

- с помощью вероятностно-статистических моделей;

- с помощью нечетких множеств;
- с помощью интервальной математики.

Это значит, что для одного и того же реального явления или процесса может быть разработан целый спектр организационно-экономических моделей. Об этом почти 40 лет назад писал В.В. Налимов: «Оказывается, что одни и те же задачи можно формулировать на различных диалектах математики, и тогда создается впечатление появления различных разделов знаний» [149, с.199].

1.4. Неопределенность и устойчивость в экономико-математических методах и моделях

Краткая сводка, приведенная выше, представляет собой лишь введение в инструментальные средства ЭММиМ. Упомянем такие перспективные направления, как когнитивные карты (в рамках этого подхода нами разработана система ЖОК [215]) и нейросетевые методы [28, 51, 52, 310, 339, 354].

ЭММиМ – инструменты совершенствования процессов управления предприятиями и организациями. На каждый метод и любую конкретную модель можно смотреть с двух сторон.

Два подхода к методам и моделям. Для определенности обсудим рассматриваемую проблему на примере интеллектуальных инструментов, описанных в терминах математики. Их можно рассматривать изнутри, сами по себе, как математические структуры, и изучать во внутриматематических традициях, доказывая соответствующие теоремы.

Второй подход – извне, с точки зрения успешности решения практических задач совершенствования процессов управления. Именно он принят в настоящем диссертационном исследовании. В соответствии с ним необходимо основное внимание обратить на адекватный выбор (при необходимости – конструирование) интеллектуальных инструментов, соответствующих решению конкретных прикладных задач. В частности, такой выбор должен учитывать присущие реальному миру *неопределенности* и осуществляться среди методов и моделей, *устойчивых* по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок [160, 170].

Проблема адекватного отражения неопределенностей. Методологический анализ организационно-экономических проблем управления предприятиями демонстрирует необходимость адекватного отражения неопределенностей реальных явлений и систем в рекомендуемых для практического использования методах и моделях.

Предпосылки любой организационно-экономической модели выполняются лишь с некоторой точностью. Например, линейная зависимость лишь с некоторой точностью приближает реальную зависимость. Коэффициент дисконтирования q при расчете чистой текущей стоимости $NPV_n(q)$ для финансового потока инвестиционного проекта (при горизонте планирования n лет) принимают одинаковым для всех будущих лет, хотя совершенно ясно, что покупательная способность денежной единицы убывает в разные годы с разной скоростью. Много такого рода примеров приведено в работе [235] при анализе проблем организации производства, отраженных в [164].

Исходные данные также известны лишь с некоторой точностью. Обсудим, например, результаты переписи населения. В нашей стране каждые 15 секунд умирает человек, каждые 20 секунд рождается новый. Поэтому численность населения меняется каждую минуту, и результаты переписи с точностью до одного человека не могут соответствовать действительности более одной минуты. Это знали еще в библейские времена (в Книге Чисел в Ветхом Завете численность военнообязанных в том или ином колене приведена с точностью до 100 человек). Неточность выше (чем при переписях населения) при подсчете численности трудовых ресурсов, безработных или даже числа работников среднего или крупного промышленного предприятия (в относительных величинах). Стоимость запасов (а потому и активов предприятия) может быть оценена лишь с некоторой точностью, она меняется при переходе от одного метода оценки к другому (например, от ФИФО к средневзвешенной оценке [348]). Разные методы оценки стоимости бизнеса дают разброс в десятки процентов. «Нет такой системы калькулирования затрат, которая позволила бы определить себестоимость продукции со стопроцентной точностью» [348, с.129].

При разработке, изучении и применении экономико-математических моделей (и основанных на них экономико-математических методов) необходимо учитывать органически присущие им неопределенности в исходных данных и предпосылках моделей. В настоящее время для описания неопределенностей используют три теоретических подхода – чаще всего вероятностно-статистический, а также основанные на теории нечеткости и интервальной математике. Все три применяются в настоящей диссертации.

Неопределенности не всегда мешают исследователю и практическому работнику. Так, словесное общение практически всегда сопровождается некоторой неопределенностью смысла слов, и именно благодаря этой неопределенности люди понимают друг друга, не уделяя много внимания уточнению отдельных понятий [150, 151, 152, 171, 176, 213]. Из-за присущей естественному языку неопределенности смысла слов для описания процессов мышления и управления используют теорию нечетких множеств [171, 263].

Источники неопределенностей. Часть неопределенностей связана с недостаточностью знаний о природных явлениях и процессах, в частности:

- неопределенности, порожденные недостаточными знаниями о природе (например, неизвестен точный объем полезных ископаемых в конкретном месторождении, а потому невозможно точно предсказать развитие добывающей промышленности и объем налоговых поступлений от ее предприятий);

- неопределенности самих природных явлений (погода, влияющая на урожайность, на затраты на отопление, на загрузку транспортных путей).

Многие возможные неопределенности связаны с ближайшим окружением предприятия, менеджер которого занимается прогнозированием:

- неопределенности, относящиеся к деятельности участников экономической жизни (прежде всего партнеров рассматриваемого предприятия), в частности, с их деловой активностью, финансовым положением, соблюдением обязательств;

- неопределенности, обусловленные социальными и административными факторами в конкретных регионах, в которых данное предприятие имеет деловые интересы. Речь идет о взаимоотношении предприятия с органами местной и региональной власти, как официальными, так и криминальными;

- неопределенности, связанные с будущими действиями поставщиков в связи с меняющимися предпочтениями рынка;

- неопределенности, порожденные конкурентным окружением, от действия которого зависит многое в судьбе конкретного предприятия. Здесь имеют место возможности промышленного шпионажа и проникновения конкурентов в коммерческие тайны, и иное воздействие на внутренние дела предприятия.

Важны и неопределенности на уровне страны, в частности:

- неопределенность будущей рыночной ситуации в стране, в том числе отсутствие достоверной информации о будущих предпочтениях потребителей;

- неопределенности, связанные с колебаниями цен (динамикой инфляции), нормы процента, валютных курсов и т.п.;

- неопределенности, порожденные нестабильностью законодательства и текущей экономической политики (т.е. с деятельностью руководства страны, министерств и ведомств), связанные с политической ситуацией, действиями партий, профсоюзов, экологических и иных организаций в масштабе страны.

Часто приходится учитывать и внешнеэкономические неопределенности, связанные с ситуацией в зарубежных странах и международных организациях, с которыми предприятие поддерживает деловые отношения.

Большое значение имеют внутренние неопределенности предприятия:

- дефектность продукции. Общепризнано, что при массовом производстве, как правило, невозможно обеспечить выпуск продукции без дефектов;

- неопределенности, относящиеся к проектируемым продукции или технологическим процессам. Они связаны с ошибками разработчиков или физической невозможностью осуществления того или иного процесса;

- неопределенности, связанные с осуществлением действующих технологических процессов. Возможны аварии различной степени тяжести, от незначительных нарушений технологических процессов до катастроф с человеческими жертвами. Как следствие нарушения технологических процессов возникают экологические неопределенности, связанные с аварийными сбросами в реки технологических жидкостей, выбросами в атмосферу газов и др.

Среди неопределенностей на предприятии есть и социальные, связанные с деяниями работников и различными конфликтами – между службами (отделами, цехами), между менеджерами высшего звена, между профсоюзами и администрацией (по поводу заработной платы, условий труда и др.).

Необходимость изучения устойчивости и адекватности экономико-математической модели. Неустранимость неопределенности влечет за собой необходимость изучения устойчивости выводов (и управленческих решений), полученных на основе экономико-математических моделей и результатов применения основанных на них методов [170], [160, с.291]. Речь идет об устойчивости относительно допустимых отклонений исходных данных и предпосылок модели. В диссертации разработана общая схема устойчивости [170], [200, гл.10], частными случаями которой являются многие распространенные постановки задач изучения математических моделей социально-экономических явлений и процессов.

В разделах 2 -5 диссертации рассмотрены конкретные примеры решения устойчивости. Требование устойчивости позволяет осуществить выбор между различными ЭММиМ, которые можно было бы применить в той или иной управленческой ситуации. Обратим внимание на принцип уравнивания погрешностей, согласно которому целесообразно, чтобы погрешности различной природы вносили одинаковый вклад в общую погрешность. Этот принцип применяется при статистическом анализе интервальных данных (и дает возможность определить рациональный объем выборки), в логистике (позволяет указать необходимую точность расчета экономических параметров), а также, например, при выборе числа градаций в анкетах, предназначенных для проведения экспертных исследований, маркетинговых и социологических опросов [170].

Проблемы неопределенности и устойчивости являются внешними по отношению к математическим или иным структурам, используемым для решения организационно-экономических задач совершенствования процессов управления промышленными предприятиями [224]. Эти проблемы участвуют в формировании «социального заказа» (или, если угодно, «технического задания»), который дает практика специалистам по ЭММиМ.

1.5. Экономико-математическое моделирование и процессы управления предприятиями и организациями

Каждую конкретную экономико-математическую модель и основанные на ней методы можно рассматривать с двух сторон – со стороны практики производственно-хозяйственной деятельности предприятий и организаций (на рис. 1.2 – взгляд слева) и со стороны математики и информационных технологий (на рис. 1.2 – взгляд справа). При взгляде справа основное внимание уделяется «внутренним» (прежде всего внутриматематическим) свойствам методов и моделей, численным методам нахождения решений и соответствующему алгоритмическому и программному обеспечению. При взгляде слева рассматривают методологию и организационно-экономические основы ЭММиМ, организацию их внедрения и практического использования.

Можно образно сказать, что взгляд слева – это взгляд организатора производства, мастера участка цеха, отвечающего за реализацию технологического процесса, а взгляд справа – это взгляд инструментальщика, отвечающего за технологическую оснастку. В терминах работы с компьютером: взгляд слева – это взгляд пользователя, а взгляд справа – это взгляд программиста, специалиста по вычислительной технике.

Рассмотрим в качестве примера такой интеллектуальный инструмент, как математическое программирование. При взгляде слева для решения тех или иных задач экономики и управления, прежде всего задач планирования, выбирают этот инструмент, в его терминах строят модель организационно-экономического явления или процесса, выделяют величины, которые необходимо получить (параметры оптимального плана, объективно обусловленные оценки ресурсов и др.), а проведение расчетов возлагают на внешних специалистов (чаще – на ранее разработанные такими специалистами программные продукты). При взгляде справа доказывают теоремы (например, теорему Куна-Таккера), разрабатывают алгоритмы решения задач математического программирования (например, симплекс-метод для решения задач линейного программирования) и создают программные продукты.

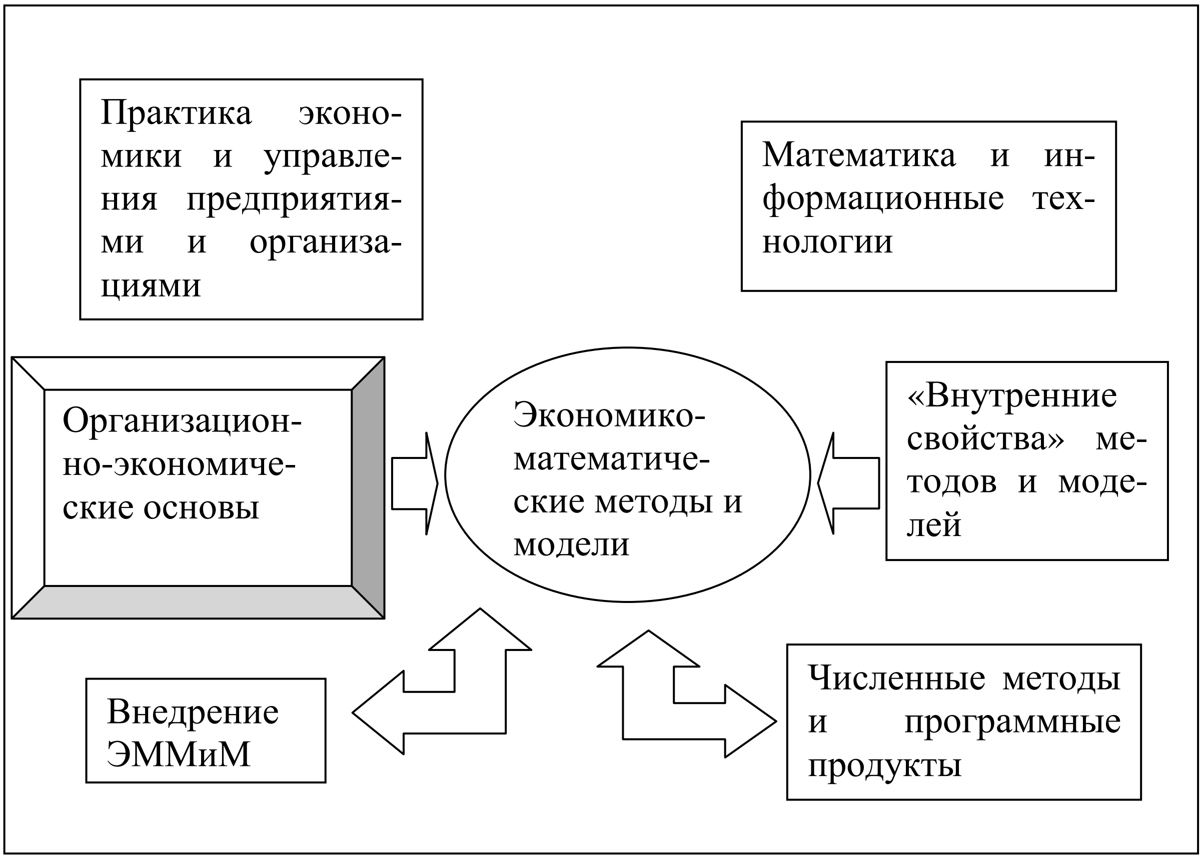


Рис.1.2. Две стороны экономико-математических методов и моделей

Можно сказать, что при взгляде справа основное внимание уделяется разработке конкретных методов и моделей как самостоятельных сущностей, как отдельных «кирпичиков» здания организационно-экономической науки , а при взгляде слева начинаем с архитектуры, с проектирования здания, а затем выбираем необходимые для реализации замысла материалы - конкретные методы и модели.

Очевидно, что взгляды слева и справа образуют диалектическое единство, не могут существовать друг без друга.

В настоящем исследовании основной упор сделан на взгляд слева. Выделяем четыре уровня научно-исследовательских работ – методологический, теоретический, методический и прикладной (рис. 1.3). Под методологией согласно [160] понимаем учение об организации деятельности. Ведем работу на методологическом уровне, основные идеи прорабатываем на теоретическом, отдельные примеры доводятся до методического и прикладного уровней.

Методологический уровень
Как ставить задачу (как организовать моделирование)? Основные идеи метода

Теоретический уровень
Проработка основных идей, доказательство теорем

Методический уровень
Разработка методик, алгоритмов, программных продуктов, рекомендаций по практическому использованию

Прикладной уровень
Практическое использование: адаптация и применение разработанного метода при решении конкретных практических задач

Рис. 1.3. Уровни научно-исследовательских работ

Пример утверждения на методологическом уровне: при росте числа слагаемых распределение суммы независимых случайных величин приближается к нормальному (общая схема Центральной предельной теоремы). Теоремы, обосновывающие это утверждения, доказывались на протяжении более 200 лет – от начала XVIII в. (Муавр) до 30-х годов XX в. (Линдеберг, Феллер). На методическом уровне необходимо установить, при каком числе слагаемых можно с достаточной для практике точности заменить допредельное распределение предельным, например, при конструировании алгоритма получения псевдослучайных чисел с нормальным распределением. На прикладном уровне датчик псевдослучайных чисел (как составляющая имитационной модели) используется для выбора оптимальных параметров бизнес-процесса.

Задача – модель - метод – условия применимости. Применение экономико-математического моделирования при разработке инструментария модернизации с целью повышения эффективности систем управления предприятиями предполагает последовательное осуществление трех этапов исследования. Первый - от исходной практической проблемы до теоретической (математической) задачи. Второй – внутриматематическое изучение и решение этой задачи. Третий – переход от математических выводов обратно к практической проблеме.

При обсуждении методологических вопросов ЭММиМ целесообразно выделять четверки проблем:
ЗАДАЧА – МОДЕЛЬ - МЕТОД - УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ.
Обсудим каждую из выделенных составляющих [195].

Задача, как правило, порождена потребностями той или иной прикладной области. Разрабатывается одна из возможных математических формализаций реальной ситуации. Например, при изучении предпочтений потребителей возникает вопрос: различаются ли мнения двух групп потребителей. При математической формализации мнения потребителей в каждой группе обычно ***моделируются*** как независимые случайные выборки, т.е. как совокупности независимых одинаково распределенных случайных величин, а вопрос маркетологов переформулируется в рамках этой ***модели*** как вопрос о проверке той или иной статистической гипотезы однородности. Речь может идти об однородности характеристик, например, о проверке равенства математических ожиданий, или о полной (абсолютной однородности), т.е. о совпадении функций распределения, соответствующих двух совокупностям.

Модель может быть порождена также обобщением потребностей (задач) ряда прикладных областей. Приведенный выше пример иллюстрирует эту ситуацию: к необходимости проверки гипотезы однородности приходят и специалисты по организации производства при сопоставлении результатов обработки деталей двумя способами, и т.д. Таким образом, одна и та же ***математическая модель*** может применяться для решения самых разных по своей прикладной сущности задач.

Метод, используемый в рамках определенной математической модели - это уже во многом, если не в основном, дело математиков. В эконометрических моделях речь идет, например, о методе оценивания, о методе проверки гипотезы, при теоретическом анализе - о методе доказательства той или иной теоремы, и т.д. В первых двух случаях алгоритмы разрабатываются и исследуются математиками, но используются прикладниками, в то время как метод доказательства касается лишь самих математиков.

Отнюдь не все модели и методы непосредственно связаны с математикой. В организационно-экономических исследованиях широко используются графические модели описания спроса и предложения, равновесных цен. Предпочтения потребителей могут быть выявлены различными методами – выборочным опросом потребителей, путем наблюдения за их поведением, с помощью различных экспертных процедур. Ясно, что для решения той или иной ***задачи*** в рамках одной и той же принятой исследователем ***модели*** может быть предложено много ***методов***.

Наконец, рассмотрим последний элемент четверки - ***условия применимости***. При использовании математической модели он - полностью внутриматематический. С точки зрения математики замена условия (кусочной) дифференцируемости некоторой функции на условие ее непрерывности может оказаться существенным научным достижением, в то время как экономист или менеджер оценить это достижение не смогут. Для них, как и во времена Ньютона и Лейбница, непрерывные функции мало отличаются от (кусочно) дифференцируемых. Точнее, они одинаково хорошо (или одинаково плохо) используются для описания и решения реальных проблем.

Точно так же прикладник (экономист или управленец) не сможет оценить внутриматематическое достижение, состоящее в переходе от конечности четвертого момента случайной величины к конечности дисперсии. Поскольку результаты реальных измерений получены с помощью некоторого прибора (средства измерения), шкала которого конечна, то прикладник априори уверен, что все результаты измерений заведомо лежат на некотором отрезке (т.е. финитны). Он с некоторым недоумением наблюдает за математиком, который рассуждает о конечности тех или иных моментов - для прикладника они заведомо конечны.

Практические следствия методологии моделирования. Она приводит к определенным выводам. Например, ЭММиМ могут разрабатываться на основе конечных вероятностных пространств. Бесконечные вероятностные пространства могут при этом рассматриваться как удобные математические схемы. Их роль – давать возможность более легко и быстро получать полезные утверждения для конечных вероятностных пространств. Из сказанного вытекает, в частности, что различные параметрические семейства распределений (нормальные, логарифмически нормальные, экспоненциальные, Коши, Вейбулла-Гнеденко, гамма-распределений) приобретают статус не более чем удобных приближений для распределений на конечных вероятностных пространствах. При таком подходе теряет свою парадоксальность тот эмпирически не раз проверенный факт, что распределение погрешностей измерений, как правило, не является гауссовым [200, раздел 4.1].

В качестве другого примера рассмотрим методы оценивания параметров. По традиции много внимания уделяется оценкам максимального правдоподобия. Однако столь же хорошие асимптотические свойства имеют одношаговые оценки, более простые с вычислительной точки зрения [210].

При разработке ЭММиМ целесообразно опираться на теорию измерений, в частности, на концепцию шкал измерения. Установлено, какими алгоритмами статистического анализа данных можно пользоваться в той или иной шкале, в частности, для усреднения результатов наблюдений. Так, для данных, измеренных в порядковой шкале, некорректно вычислять среднее арифметическое. В качестве средних величин для таких данных можно использовать порядковые статистики, в частности, медиану.

Статистические методы исследования часто опираются на использование современных *информационных технологий*. В частности, распределение статистики можно находить методами асимптотической математической статистики или путем статистического моделирования [223].

Приведенные примеры показывают пользу методологических соображений в деятельности разработчика ЭММиМ.

Концепция контроллинга в разработке и функционировании системы управления промышленным предприятием [220]. В современных условиях эффективное функционирование инновационных предприятий и организаций возможно лишь при адекватном использовании различных форм и методов организационно-экономического обеспечения их деятельности. Все большее распространение приобретает концепция контроллинга [317, 325].

Согласно одному из определений *контроллинг – это система информационно-аналитической поддержки процесса принятия решений при управлении организацией (предприятием, корпорацией)* (ср. [101, с.9]). Тем самым контроллинг пронизывает все стороны деятельности предприятия, его применяют при решении всех проблем, связанных с совершенствованием процессов управления на промышленных предприятиях и в их объединениях [60, 227]. Функции контроллинга осуществляют специальные подразделения предприятий - службы контроллинга. Поэтому контроллинг включен в число функциональных областях управленческой деятельности предприятия, для которых в диссертации проведена разработка ряда ЭММиМ (раздел 1.2).

Работы по развитию и внедрению методов контроллинга в России координирует ***Объединение Контроллеров***. В частности, с 2002 г. выходит ежеквартальный журнал «Контроллинг». В курс «Экономика предприятия» для студентов технических специальностей [348] включен раздел по контроллингу. Мы вели исследования в рамках Лаборатории экономико-математических методов исследования НУК ИБМ МГТУ им. Н.Э. Баумана.

ЭММиМ играют важную роль в контроллинге. Используем два естественных направления исследований:

1. От ЭММиМ к решению конкретных задач контроллинга («взгляд справа»).

2. От конкретных проблем, возникающих в практике работы служб контроллинга, к разработке необходимых для их решения конкретных ЭММиМ («взгляд слева»).

В дальнейших разделах диссертационного исследования постоянно рассматриваются ЭММиМ, направленные на решение задач контроллинга. Разработке, развитию и применению ЭММиМ в контроллинге посвящены наши работы [197, 199, 221, 236] и др.

О внедрении ЭММиМ. В XXI веке основное внимание исследователей и управленцев переносится с разработки отдельных экономико-математических методов и моделей («взгляд справа») на системы внедрения таких методов в практическую деятельность предприятий и организаций («взгляд слева»). В этой связи укажем на новую систему внедрения ЭММиМ, новую систему совершенствования бизнеса «Шесть сигм».

Согласно [245], «Шесть сигм» - это способ управлять всей компанией или отдельным ее подразделением (например, литейным цехом или центральной заводской лабораторией). Фактически речь идет о развитии системы управления качеством и контроллинга на предприятии, в организации, фирме, компании. Анализ системы «Шесть сигм» показывает, что, несмотря не некоторое своеобразие терминов, связанное с корнями этой системы (лежащими в проблемах управления качеством), фактически «Шесть сигм» - это глубоко проработанная система внедрения современных подходов к управлению предприятием и его подразделениями, прежде всего контроллинга. Отметим большое место, которое занимают математические методы исследования, прежде всего статистические и экспертные, среди ее инструментов.

Проанализируем изменение представлений о проблемах внедрения современных научных достижений в отечественную практику. В качестве примера для обсуждения рассмотрим теорию и методы планирования эксперимента, об истории которых в нашей стране рассказано в [130]. Локомотивом работ по планированию эксперимента являлся «незримый коллектив» под руководством проф. В.В. Налимова, основные научные идеи и результаты их практического внедрения обсуждались в журнале «Заводская лаборатория».

Очевидно, совершенно необходим первый этап - разработка самой научной теории до той стадии, когда предлагаемые рекомендации уже можно использовать на практике. Основной результат этого этапа - методические разработки и образцы внедрения. Для планирования эксперимента первый этап в основном завершился к началу 1970-х годов.

Термин «завершился» требует уточнения. Научные исследования, разумеется, продолжались после 1970 г., ведутся сейчас, и будут продолжаться в дальнейшем, поскольку любая научная область может - при наличии энтузиастов - развиваться сколь угодно долго. Уточним: к началу 1970-х годов была создана методическая база для массового внедрения.

Следующий этап - пропаганда возможностей методов планирования эксперимента, преподавание и подготовка кадров. В статье [130] рассказано о многочисленных акциях 1960-70-х гг. в этом направлении. Казалось, что дальше всё пойдет самотеком. Но не получилось. Широкого потока внедренческих работ не последовало. Блестящие работы не стали образцами для подражания.

И не только для планирования эксперимента. Примерно так же развивалась ситуация с внедрением экономико-математических методов. Хотя были и некоторые незначительные отличия. Удалось организовать Центральный экономико-математический институт РАН, а вот академического института по планированию эксперимента нет до сих пор. И Межфакультетская лаборатория статистических методов МГУ им. М.В.Ломоносова под руководством акад. А.Н. Колмогорова, которая занималась развитием теории и внедрением методов планирования эксперимента, расформирована в середине 1970-х годов. Были и другие примеры того, что организационные успехи по тем или иным причинам не удавалось закрепить [130].

Стало ясно, что создания методов и их пропаганды недостаточно. Выявилась необходимость перехода к третьему этапу - этапу разработки организационных форм, обеспечивающих широкое внедрение. Наиболее ярким проявлением этого этапа было учреждение в 1990 г. Всесоюзной статистической ассоциации (ВСА), объединяющей - прежде всего в секции статистических методов - специалистов по математическим методам исследования [180]. В статье [181] тех лет, посвященной проблемам внедрения прикладной статистики и других статистических методов, развернута программа создания сети научно-исследовательских и внедренческих институтов по этой тематике, аналогичной сети метрологических организаций. К сожалению, все эти глобальные планы организации внедрения рассматриваемых методов в государственном масштабе остались нереализованными из-за развала СССР и экономических «реформ» 1990-х годов, приведших к сокращению (в разы!) объемов научных исследований и численности работников в сфере науки и научного обслуживания, а также соответствующих подразделений (например, служб надежности) промышленных предприятий, особенно в оборонно-промышленном комплексе. Интересно отражение развития статистических методов в СССР в западных публикациях [362, 363, 364, 383].

Сейчас мы находимся на четвертом этапе. Надо разрабатывать и широко использовать новые организационные формы внедрения математических методов исследования на отдельных предприятиях. С похожими проблемами сталкиваются разработчики крупных информационных систем управления предприятиями (типа SAP R/3, Oracle, JD Edwards, Baan), занимающиеся их внедрением в конкретных организациях [227]. В частности, необходимо создание соответствующей службы под непосредственным началом одного из высших руководителей организации. Недаром внедрение контроллинга - современных методов управления предприятиями - обычно начинается именно с создания службы контроллинга и прорабатывания ее взаимодействия со всеми остальными структурами предприятия [100].

Система «Шесть сигм» ценна, прежде всего, своей организационной составляющей, позволяющей рассматривать ее как универсальную систему совершенствования бизнеса [319]. Той, которой не уделяли внимания на ранних этапах истории внедрения современных математических методов исследования. По нашей оценке, система «Шесть сигм» может быть использована не только для повышения качества продукции и услуг. Она дает алгоритмы практической деятельности в том числе и в области организации внедрения современных организационно-экономических методов и моделей [211].

1.6. Постановка цели и задач исследования

На основе анализа, проведенного в предыдущих разделах настоящей главы, обоснуем актуальность темы, сформулируем цель и задачи диссертации.

Актуальность исследования. Исходные данные, используемые ЭММиМ, известны лишь с некоторой степенью точности. Самим методам и моделям присущи методические погрешности.

Процессы управления промышленными предприятиями реализуются в реальных ситуациях с достаточно высоким уровнем неопределенности. Велика роль нечисловой информации как на «входе», так и на «выходе» процесса принятия управленческого решения. Неопределенность и нечисловая природа управленческой информации должны быть отражены при анализе устойчивости ЭММиМ.

Для обоснованного практического применения математических моделей процессов управления предприятиями и основанных на них методов должна быть изучена устойчивость получаемых с их помощью выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей. Возможные применения результатов подобного исследования:

- заказчик научно-исследовательской работы получает представление о точности предлагаемого решения;

- удается выбрать из многих моделей наиболее адекватную;

- по известной точности определения отдельных параметров модели удается указать необходимую точность нахождения остальных параметров;

- переход к случаю «общего положения» позволяет получать более сильные с математической точки зрения результаты.

Из сказанного вытекают формулировки цели и задач диссертационной работы.

Цель исследования: разработка и развитие методологии обоснования, выбора и создания новых математических методов и моделей, направленных на модернизацию управления предприятиями, на основе изучения устойчивости получаемых с их помощью выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей.

Задачи исследования. Для достижения поставленной в работе цели необходимо решить следующие задачи:

1. Развить методологию разработки математических методов и моделей процессов управления предприятиями и организациями, разработать общий подход к изучению устойчивости таких моделей и методов (общую схему устойчивости) и выделить частные постановки проблем устойчивости, в том числе устойчивости к изменению данных, их объемов и распределений, по отношению к временным характеристикам. Обосновать моделирование с помощью нечисловых объектов как подход к построению устойчивых методов и моделей.

2. На основе концепции устойчивости по отношению к временным характеристикам (моменту начала реализации проекта, горизонту планирования) провести экономико-математическое моделирование процессов стратегического управления промышленными предприятиями: обосновать применение асимптотически оптимальных планов, дать характеризацию моделей с дисконтированием.

3. На основе методологии устойчивости разработать непараметрические (устойчивые к изменению распределения) статистические методы для решения конкретных задач управления промышленными предприятиями – для оценки характеристик, прогнозирования, сегментации рынка и др.

4. Для разработки экономико-математических моделей нечисловых объектов установить связи между различными видами объектов нечисловой природы, построить вероятностные модели их порождения. На основе расстояний (показателей различия, мер близости) и задач оптимизации

развить статистическую теорию в пространствах общей природы. Разработать методы моделирования конкретных нечисловых объектов.

5. Как самостоятельное направление нечисловой статистики разработать асимптотическую статистику интервальных данных на основе понятий нотны и рационального объема выборки, развить интервальные аналоги основных областей прикладной статистики.

6. На основе методологии устойчивости разработать устойчивые экономико-математические методы и модели процессов управления в функциональных областях производственно-хозяйственной деятельности предприятий и организаций, в которых существенны неопределенности, допускающие экономико-математическое моделирование, в частности, при использовании экспертных методов, в инновационном и инвестиционном менеджменте, при управлении качеством промышленной продукции, выявлении предпочтений потребителей, управлении материальными ресурсами предприятия.

Решению сформулированных задач диссертационного исследования (каждая из них разбита на несколько конкретных подзадач) посвящены дальнейшие главы 2 – 5.

Полезно отметить, что степень подробности изложения различна. Методологические проблемы мы стараемся обсуждать достаточно подробно. Однако конкретные результаты иногда описываются в общих чертах, за подробностями читатель отсылается к конкретным публикациям (в списке литературы 124 работы автора). Другими словами, настоящая диссертация во многом носит характер научного доклада по опубликованным работам, как и первая наша докторская диссертация по техническим наукам. Связано это с желанием представить читателю научную область в целом, а не отдельными фрагментами. В этом отношении обе наши докторские диссертации резко отличаются от кандидатской диссертации «Оценки скорости сходимости распределений статистик интегрального типа», все 148 страниц которой были посвящены доказательству одной-единственной теоремы.

В ходе создания Всесоюзной статистической ассоциации (учредительный съезд состоялся в1990 г.) коллективными усилиямибыло проанализировано состояние и перспективы развития теоретической и прикладной статистики, в результате создана ***новая парадигма организационно-экономического моделирования, эконометрики и статистики,*** основанная, в частности, на переходе от использования параметрических семейств распределений к непараметрической и нечисловой статистике. Выявлена необходимость создания нового поколения учебной литературы, которая должна сменить издания на основе идей середины XX в.

Реализация этой задачи – создание системы учебных дисциплин и учебников нового поколения, отражающих современную научную парадигму в рассматриваемой области – основное достижение созданной нами научной школы МГТУ им. Н.Э. Баумана в области организационно-экономического моделирования, эконометрики и статистики.

Глава 2. Общая схема устойчивости и ее применения в математических моделях социально-экономических явлений и процессов

2.1. Составляющие общей схемы устойчивости

Создание и использование модели порождения и анализа данных в ЭММиМ происходит в соответствии с триадой «практика – теория – практика». Сначала вводятся некоторые математические объекты, соответствующие интересующим исследователя реальным объектам, и на основе представлений о свойствах реальных объектов формулируются необходимые для успешного моделирования свойства математических объектов, которые и принимаются в качестве аксиом. Затем аксиоматическая теория развивается как часть математики, вне связи с представлениями о реальных объектах. На заключительном этапе полученные в математической теории результаты интерпретируются содержательно. Получаются утверждения о реальных объектах, являющиеся следствиями тех и только тех их свойств, которые ранее были аксиоматизированы.

После построения математической модели реального явления или процесса встает вопрос об ее адекватности. Иногда ответ на этот вопрос может дать эксперимент. Рассогласование модельных и экспериментальных данных следует интерпретировать как признак неадекватности некоторых из принятых аксиом. Однако для проверки адекватности социально-экономических моделей зачастую невозможно поставить решающий эксперимент в отличие, скажем, от физических моделей. С другой стороны, для одного и того же явления или процесса, как правило, можно составить много возможных моделей, если угодно, много разновидностей одной базовой модели. Поэтому необходимы какие-то дополнительные условия, которые позволяли бы из множества возможных моделей и эконометрических методов анализа данных выбрать наиболее подходящие. В качестве одного из подобных условий выдвигается требование *устойчивости* выводов, полученных на основе модели и метода анализа данных, относительно допустимых отклонений исходных данных и предпосылок модели или условий применимости метода.

Отметим, что в большинстве случаев исследователей и практических работников интересуют не столько сами модели и методы, сколько решения, которые с их помощью принимаются. Решения, как правило, принимаются в условиях неполноты информации. Так, любые числовые параметры известны лишь с некоторой точностью. Введение в рассмотрение возможных неопределенностей исходных данных требует определенных заключений относительно устойчивости принимаемых решений по отношению к этим допустимым неопределенностям.

Взаимоотношения моделей и методов заслуживают обсуждения. В процессе познания не всегда метод следует за математической моделью. Метод может быть разработан на основе эвристических соображений, словесной модели. Однако *свойства метода* можно изучать лишь в рамках той или иной модели. В рамках одной математической модели метод может быть оптимальным, в рамках другой – несостоятельным. Проблема состоит в создании или выборе модели, адекватной изучаемому явлению или процессу.

С точки зрения практической деятельности модели и методы нужны не сами по себе, а как инструменты разработки управленческих решений, которые могут описываться как выводы, заключения, планы мероприятий. Рассмотрим цепочку:

ДАННЫЕ – МЕТОД (их обработки) – ВЫВОДЫ.

Как обосновать адекватность выводов? Один из критериев – устойчивость метода обработки данных. Устойчивость выводов можно изучать лишь в рамках определенной модели.

Введем основные понятия [170]. Будем считать, что имеются *исходные данные,* на основе которых принимаются *решения.* Способ переработки (отображения) исходных данных в решение назовем *моделью.* Таким образом, с общей точки зрения модель – это функция, переводящая исходные данные в решение, т.е. способ перехода значения не имеет. Во многих конкретных постановках устойчивости выводы получают с помощью определенного метода, основанного на некоторой модели. С прикладной точки зрения модель первична, метод – вторичен, поскольку результаты его применения определяются свойствами модели (см. обсуждение четверки проблем ***Задача – модель - метод – условия применимости*** в разд.1.5). Эти соображения оправдывают принятую нами в [170] терминологию общей схемы устойчивости.

Любая рекомендуемая для практического использования модель должна быть исследована *на устойчивость* относительно допустимых отклонений исходных данных и предпосылок модели. Укажем некоторые возможные применения результатов подобного исследования:

- заказчик научно-исследовательской работы получает представление о точности предлагаемого решения;
- удается выбрать из многих моделей наиболее адекватную;
- по известной точности определения отдельных параметров модели удается указать необходимую точность нахождения остальных параметров;
- переход к случаю «общего положения» позволяет получать более сильные с математической точки зрения результаты.

Примеры. По каждому из четырех перечисленных возможных применений в дальнейших разделах диссертации и в [170, 200] приведены примеры. Так, в прикладной статистике точность предлагаемого решения связана с разбросом исходных данных и с объемом выборки. Выбору наиболее адекватной модели посвящены темы, рассмотренные в главе 3 ниже (и в гл. 8 и 9 [210]), связанные с обсуждением моделей однородности и регрессии. Использование рационального объема выборки в статистике интервальных данных (раздел 4.4) исходит из принципа уравнивания погрешностей. Этот принцип основан на том, что по известной точности определения отдельных параметров модели удается указать необходимую точность нахождения остальных параметров. Другим примером применения принципа уравнивания погрешностей является нахождение необходимой точности оценивания параметров в моделях логистики, рассмотренных в главе 5. Наконец, переходом к случаю «общего положения» в прикладной статистике является, в частности, переход к непараметрическим методам (см. главу 3), необходимый из-за невозможности обосновать принадлежность результатов наблюдений к тем или иным параметрическим семействам.

Можно рекомендовать обрабатывать данные несколькими способами (методами). Выводы, общие для всех способов, скорее всего отражают реальность (являются объективными). Выводы, меняющиеся от метода к методу, субъективны, зависят от исследователя, выбравшего тот или иной метод анализа данных. Здесь речь идет об устойчивости выводов по отношению к выбору метода.

Специалисты по математическому моделированию и теории управления считают устойчивость одной из важных характеристик технических, социально-экономических, медицинских и иных моделей. Достаточно глубокие исследования ведутся по ряду направлений.

Первоначальное изучение влияния малого изменения одного параметра обычно называют *анализом чувствительности*. Оно описывается значением частной производной. Если модель задается дифференцируемой функцией, то итог анализа чувствительности – вектор значений частных производных в анализируемой точке.

Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений развивается по крайней мере с XIX в. [254]. Выработаны соответствующие понятия – устойчивость по Ляпунову, корректность, доказаны глубокие теоремы. Модели явлений и процессов, выражаемые с помощью дифференциальных уравнений, могут быть исследованы на устойчивость путем применения хорошо разработанного математического аппарата.

Вопросы устойчивости изучались практически во всех направлениях ЭММиМ и других прикладных математических методов – в математическом программировании, и в теории массового обслуживания (теории очередей), и в эколого-экономических моделях, и в различных областях эконометрики.

Общая схема устойчивости. Прежде чем переходить к конкретным постановкам, обсудим «общую схему устойчивости», дающую понятийную базу для обсуждения проблем устойчивости в различных предметных областях.

Определение 1. Общей схемой устойчивости называется объект $\{A, B, f, d, E\}$.

В рассматриваемом кортеже A – множество, интерпретируемое как пространство исходных данных; B – множество, называемое пространством решений. Способ получения выводов, т.е. однозначное отображение $f : A \to B$, называется моделью. Об этих трех составляющих общей схемы устойчивости уже шла речь выше.

Оставшиеся два понятия нужны для уточнения понятий близости в пространстве исходных данных и пространстве решений. Подобные уточнения могут быть сделаны разными способами. Самое «слабое» уточнение – на языке топологических пространств. Тогда возможны качественные выводы (последовательность сходится или не сходится), но не количественные расчеты. Самое «сильное» уточнение – на языке метрических пространств. Промежуточный вариант – используются показатели различия (отличаются от метрик тем, что не обязательно выполняются неравенства треугольника) или вводимые ниже понятия.

Пусть d – показатель устойчивости, т.е. неотрицательная функция, определенная на подмножествах *У* множества *B* и такая, что из $Y_1 \subseteq Y_2$ вытекает $d(Y_1) \leq d(Y_2)$. Часто показатель устойчивости $d(Y)$ определяется с помощью метрики, псевдометрики или показателя различия (меры близости) ρ как диаметр множества *У,* т.е.

$$d(Y) = \sup\{\rho(y_1, y_2), y_1 \in Y, y_2 \in Y\}.$$

Таким образом, в пространстве решений с помощью показателя устойчивости вокруг образа исходных данных может быть сформирована система окрестностей (используем понятия общей топологии). Но сначала надо такую систему сформировать в пространстве исходных данных.

Для этого введем $E = \{E(x,\theta), x \in A, \theta \in \Theta\}$ – совокупность допустимых отклонений в точках x пространства исходных данных, т.е. систему подмножеств множества *A* такую, что каждому элементу множества исходных данных $x \in A$ и каждому значению параметра θ из некоторого множества параметров Θ соответствует подмножество $E(x,\theta)$ множества исходных данных. Оно называется множеством допустимых отклонений в точке x при значении параметра, равном θ. Наглядно можно представить себе, что вокруг точки x взята окрестность радиуса θ.

Определение 2. Показателем устойчивости в точке x при значении параметра, равном θ*,* называется число

$$\beta(x, E(x,\theta)) = d(f(E(x,\theta))).$$

Другими словами, показатель устойчивости в конкретной точке x - это диаметр образа конкретного множества допустимых колебаний при рассматриваемом в качестве модели отображении. Очевидно, что этот показатель устойчивости зависит как от исходных данных, так и от диаметра множества возможных отклонений в исходном пространстве. Для непрерывных функций показатель устойчивости обычно называется модулем непрерывности.

Естественно выяснить, насколько сузится образ окрестности возможных отклонений при максимально возможном сужении этой окрестности.

Определение 3. Абсолютным показателем устойчивости в точке x называется число

$\beta(x, E) = \inf\{\beta(x, E(x, \theta), \theta \in \Theta)\}$.

Если функция f непрерывна, а окрестности – именно те, о которых идет речь в математическом анализе (шары различного радиуса), то максимальное сужение означает сужение к точке и абсолютный показатель устойчивости равен 0. Но в теории измерений и статистике интервальных данных мы сталкиваемся с совсем иными ситуациями. В теории измерений (раздел 4.3) окрестностью исходных данных являются все те вектора, что получаются из исходного путем преобразования координат с помощью допустимого преобразования шкалы, а допустимое преобразование шкалы берется из соответствующей группы допустимых преобразований. В статистике интервальных данных (раздел 4.4) под окрестностью исходных данных естественно понимать – при описании выборки – куб с ребрами 2Δ и центром в исходном векторе. И в том, и в другом случае максимальное сужение не означает сужение к точке.

Естественным является желание ввести характеристики устойчивости на всем пространстве. Не вдаваясь в математические тонкости (см. о них монографию [170]), рассмотрим меру μ на пространстве A такую, что мера всего пространства равна 1 (т.е. $\mu(A) = 1$).

Определение 4. Абсолютным показателем устойчивости на пространстве исходных данных A по мере μ называется число

$\gamma(\mu) = \int_A \beta(x, E) d\mu$.

Здесь используется интеграл Лебега. Интегрирование проводится по (абстрактному) пространству исходных данных *A* по мере μ. Естественно, должны быть выполнены некоторые внутриматематические условия.

Определение 5. Максимальным абсолютным показателем устойчивости называется

$$\gamma = \sup\{\beta(x, E), x \in A\}.$$

Легко видеть, что

$$\gamma = \sup \gamma(\mu),$$

где супремум берется по всем описанным выше мерам.

Итак, построена иерархия показателей устойчивости математических моделей реальных явлений и процессов. Эти показатели использовались в исследованиях конкретных проблем устойчивости (см., например, [160, 161]). Математическая теория на основе общей схемы устойчивости подробно развивалась в [170]. Приведем еще одно полезное определение.

Определение 6. Модель *f* называется абсолютно ε–устойчивой, если $\gamma \leq \varepsilon$, где γ – максимальный абсолютный показатель устойчивости.

Пример. Если показатель устойчивости формируется с помощью метрики ρ, совокупность допустимых отклонений *E* – это совокупность всех окрестностей всех точек пространства исходных данных *A*, то 0–устойчивость модели *f* эквивалентна непрерывности функции *f* на множестве *A*.

Типовая проблема в общей схеме устойчивости – проверка ε–устойчивости данной модели *f* относительно данной системы допустимых отклонений *E*.

Часто оказываются полезными следующие два обобщения основной проблемы.

Проблема A (*проблема характеризации устойчивых моделей*). Даны пространство исходных данных *A,* пространство решений *B,* показатель устойчивости *d,* совокупность допустимых отклонений *E* и неотрицательное число ε. Описать достаточно широкий класс ε – устойчивых моделей *f*. Или: найти все ε – устойчивые модели среди моделей, обладающих данными свойствами, т.е. входящих в данное множество моделей.

Проблема Б (*проблема характеризации систем допустимых отклонений*). Даны пространство исходных данных *A*, пространство решений *B*, показатель устойчивости *d*, модель *f* и неотрицательное число ε. Описать достаточно широкий класс систем допустимых отклонений *E*, относительно которых модель *f* является ε—устойчивой. Или: найти все такие системы допустимых отклонений *E* среди совокупностей допустимых отклонений, обладающих данными свойствами, т.е. входящих в данное множество совокупностей допустимых отклонений.

Прозрачный смысл имеют проблемы А и Б в теории измерений (глава 4). Модель в этом случае определяется видом средней величины. Проблема А – это поиск всех средних величин, которыми можно пользоваться в определенной шкале измерений. Поиск среди всех средних величин (среди средних по Коши) или более узкого множества средних величин (среди средних по Колмогорову). Проблема Б – обратная: выяснение, в каких шкалах измерений можно пользоваться конкретной средней (например, средней геометрической).

Ясно, что проблемы А и Б можно рассматривать не только для показателя устойчивости γ, но и для других только что введенных показателей устойчивости.

Замечание. Термин «характеризация» используется согласно Математической Энциклопедии: «характеризационные теоремы в теории вероятностей и математической статистике – теоремы, устанавливающие связь между типом распределения случайных величин или случайных векторов и некоторыми общими свойствами функций от них» [131, с.750] и практике его применения [79].

Язык общей схемы устойчивости позволяет описывать конкретные задачи специализированных теорий устойчивости в различных областях исследований, выделять основные элементы в них, ставить проблемы типа А и Б. В частности, на этом языке легко формулируются задачи теории устойчивости решений дифференциальных уравнений, теории робастности статистических процедур, проблемы адекватности теории измерений, достигаемой точности расчетов в статистике интервальных данных и в логистике (см. раздел 5.5), и т.д.

Покажем, что введенные определения соответствуют классическим понятиям устойчивости в теории дифференциальных уравнений.

В качестве примера рассмотрим определение устойчивости по Ляпунову решения $\varphi(t,x)$ нормальной автономной системы дифференциальных уравнений $\dot{y}=g(y)$ с начальными условиями $\varphi(0,x)=x$. Здесь пространство исходных данных *A* – конечномерное евклидово пространство, множество допустимых отклонений $E(x,\theta)$ - окрестность радиуса θ точки $x\in A$, пространство решений *B* – множество функций на луче $[0,+\infty)$ с метрикой

$$\rho(y_1,y_2)=\sup_{t\geq 0}|y_1(t)-y_2(t)|.$$

Модель *f* – отображение, переводящее начальные условия *x* в решение системы дифференциальных уравнений с этими начальными условиями $\varphi(t,x)$.

В терминах общей схемы устойчивости положение равновесия *a* называется *устойчивым по Ляпунову*, если $\beta(a,E)=0$.

Для формулировки определения асимптотической устойчивости по Ляпунову надо ввести в пространстве решений *B* псевдометрику

$$\rho_1(y_1,y_2)=\overline{\lim_{t\to\infty}}|y_1(t)-y_2(t)|.$$

Положение равновесия *a* называется асимптотически устойчивым, если $\beta_1(a,E(a,\varepsilon))=0$ для некоторого $\varepsilon>0$, где показатель устойчивости β_1 рассчитан с использованием псевдометрики ρ_1.

Таким образом, общая схема устойчивости естественным образом включает в себя классические понятия теории устойчивости по Ляпунову. Вместе с тем отметим, что эта схема дает общий подход к различным проблемам устойчивости. Прежде всего, она предоставляет исследователю систему понятий, которые в каждом конкретном случае должны конкретизироваться применительно к решаемой задаче.

Ранее речь шла о допустимых отклонениях в пространстве исходных данных. Часто оказывается необходимым говорить и об отклонениях от предпосылок модели (например, об отклонениях распределений наблюдаемых случайных величин от предполагаемого в модели гауссова (нормального) распределения). С чисто формальной точки зрения для ввода в рассмотрение отклонений от предпосылок модели достаточно расширить понятие «исходные данные» до пары (x, f), т.е. включить «прежнюю» модель в качестве второго элемента пары. Все остальные определения остаются без изменения. Теперь отклонения в пространстве решений вызываются не только отклонениями в исходных данных x, но и отклонениями от предпосылок модели, т.е. отклонениями f. Это соображение понадобится в главе 3 при рассмотрении робастности статистических процедур.

Соотношение общей схемы устойчивости с подходами других авторов обсуждается в [99, гл.8], [170, гл.1] и др. Отметим работу [144].

2.2. Конкретные постановки проблем устойчивости в экономико-математических методах и моделях

Перечислим несколько конкретных постановок проблем устойчивости в математических методах и моделях, используемых при управлении производственно-хозяйственной деятельностью предприятий и организаций и рассмотренных в настоящем исследовании (в скобках указаны области исследования, к которым относятся соответствующие постановки):

1) Устойчивость по отношению к изменению данных (статистика интервальных и нечетких данных);

2) Устойчивость к изменению объема данных (объема выборки) – асимптотическая статистика;

3) Устойчивость к изменению распределения данных (непараметрическая и робастная статистика);

4) Устойчивость по отношению к временным характеристикам - моменту начала реализации проекта, горизонту планирования (ЭММиМ - математическая экономика);

5) Борьба с неопределенностью путем изменения вида данных, т.е. путем перехода к нечисловым данным (статистика нечисловых данных).

6) Устойчивость по отношению к допустимым преобразованиям шкал измерения (статистика нечисловых данных).

7) Устойчивость характеристик инвестиционных проектов к изменению коэффициента дисконтирования с течением времени (ЭММиМ в функциональных областях деятельности предприятий);

8) Устойчивость к изменению коэффициентов и объемов партий в моделях управления запасами, оценка достигаемой точности расчетов… (ЭММиМ в функциональных областях деятельности предприятий)

Речь идет прежде всего об оценке влияния тех или иных неопределенностей на управленческие решения.

Начнем с асимптотических методов математической статистики.

Устойчивость по отношению к объему выборки. Различные асимптотические постановки в прикладной статистике естественно рассматривать как задачи устойчивости. Если при безграничном возрастании объема выборки некоторая величина стремится к пределу, то в терминах общей схемы устойчивости это означает, что она 0—устойчива в соответствующей псевдометрике (см. выше обсуждение асимптотической устойчивости по Ляпунову). С содержательной точки зрения употребление термина «устойчивость» в такой ситуации представляется вполне оправданным, поскольку рассматриваемая величина мало меняется при изменении объема выборки.

Рассмотрим проблему и методы оценки близости предельных распределений статистик и распределений, соответствующих конечным объемам выборок. При каких объемах выборок уже можно пользоваться предельными распределениями? Каков точный смысл термина «можно» в предыдущей фразе? Основное внимание уделим переходу от точных формул допредельных распределений к пределу и применению метода статистических испытаний (Монте-Карло).

Начнем с обсуждения взаимоотношений асимптотической математической статистики и практики анализа статистических данных. Как обычно подходят к обработке реальных данных в конкретной задаче? Сначала строят статистическую модель. Если хотят перенести выводы с совокупности результатов наблюдений на более широкую совокупность, например, предсказать что-либо, то рассматривают, как правило, вероятностно-статистическую модель. Например, традиционную модель выборки, в которой результаты наблюдений – реализации независимых (в совокупности) одинаково распределенных случайных величин. Очевидно, *любая модель лишь приближенно соответствует реальности.* В частности, естественно ожидать, что распределения результатов наблюдений несколько отличаются друг от друга, а сами результаты связаны между собой, хотя и слабо.

Итак, первый этап – переход от реальной ситуации к математической модели. Констатируем: на настоящем этапе своего развития математическая теория статистики зачастую не позволяет провести необходимые исследования для имеющихся объемов выборок.

Как конкретизируется общая схема устойчивости при изучении асимптотических моделей, в частности, устойчивости по отношению к объему выборки?

Пусть нас интересует поведение отображения $g_t : Z \to W, t \in T$ при $t \to \infty$. Рассмотрим схему устойчивости, в которой $A = Z \times (T \cup \{\infty\}), B = W$, модель *f* переводит (*z, t*) в $g_t(z)$, а (z,∞) - в значение предельной функции $g_\infty(z)$. Пусть ρ - метрика в *B*. Устойчивость будем изучать в точках (z,∞). Окрестности имеют вид $G((z,\infty), s \in T) = \{(z,t), t \geq s\}$. Тогда $\beta((z,\infty), E) = 0$ эквивалентно

$$\lim_{t \to \infty} g_t(z) = g_\infty(z).$$

При изучении устойчивости по отношению к объему выборки *t* = *n*, *T* = {1, 2, 3, ….}, а $g_t(z) = F_n(z) = P(\xi_n < z)$ - функция распределения рассматриваемой статистики ξ_n. Если $\beta((z,\infty), E) = 0$ при всех *z*, то распределение статистики ξ_n сходится к предельному распределению. С точки зрения концепции устойчивости возникает ряд дополнительных вопросов, например, о скорости сходимости. Обсудим ситуацию подробнее.

Точные формулы и асимптотика. Начнем с наиболее продвинутой в математическом плане ситуации, когда для статистики известны как предельное распределение, так и распределения при конечных объемах выборки.

Примером является двухвыборочная односторонняя статистика Н.В. Смирнова. Рассмотрим две независимые выборки объемов *m* и *n* из непрерывных функций распределения *F*(*x*) и *G*(*x*) соответственно. Для проверки гипотезы однородности двух выборок (ср. гл.3), т.е. гипотезы

H_0: *F*(*x*) = *G*(*x*) для всех действительных чисел *x*,

в 1939 г. Н.В. Смирнов в статье [291] предложил использовать статистику

D+(*m,n*) = sup (*Fm*(*x*) – *Gn*(*x*)) ,

где *Fm*(*x*) – эмпирическая функция распределения, построенная по первой выборке, *Gn*(*x*) – эмпирическая функция распределения, построенная по второй выборке, супремум берется по всем действительным числам *x*. Для обсуждения проблемы соотношения точных и предельных результатов ограничимся случаем равных объемов выборок, т.е. $m = n$. Положим

$$H(n,t) = P(D^{+}(n,n) \geq \frac{t}{\sqrt{n}}).$$

В цитированной статье [291] Н.В. Смирнов установил, что при безграничном возрастании объема выборки n вероятность $H(n, t)$ стремится к $\exp(-t^2)$.

В работе [49] 1951 г. Б.В. Гнеденко и В.С. Королюк показали, что при целом $c = t\sqrt{n}$ (именно при таких t вероятность $H(n, t)$ как функция t имеет скачки, поскольку статистика Смирнова $D+(n,n)$ кратна $1/n$) рассматриваемая вероятность $H(n, t)$ выражается через биномиальные коэффициенты, а именно,

$$H(n,t) = \binom{2n}{n-c} / \binom{2n}{n}. \qquad (2.1)$$

К сожалению, непосредственные расчеты по формуле (2.1) возможны лишь при сравнительно небольших объемах выборок, поскольку величина $n!$ уже при n=100 имеет более 200 десятичных цифр и не может быть без преобразований использована в вычислениях. Следовательно, наличие точной формулы для интересующей нас вероятности не снимает необходимости использования предельного распределения и изучения точности приближения с его помощью.

Формула Стирлинга для гамма-функции и, в частности, для факториалов позволяет преобразовать последнее выражение в асимптотическое разложение, т.е. построить бесконечный степенной ряд (по степеням n) такой, что каждая следующая частичная сумма дает все более точное приближение для интересующей нас вероятности $H(x, t)$. Это и было сделано в работе А.А. Боровкова в 1962 г. Большое количество подобных разложений для различных статистических задач приведено в работах В.М. Калинина и О.В. Шалаевского конца 1960-х — начала 1970-х годов. (Асимптотические разложения в ряде случаев расходятся, т.е. остаточные члены имеют нетривиальную природу.)

Затем в наших работах сделана попытка теоретически оценить остаточный член второго порядка [170, §2.2, с.37–45]. Имеем:

$H(n, t) = \exp(-t^2)(1 + f(t)/n + g(n,t)/n^2)$, где $f(t) = t^2(1/2 - t^2/6)$.

Целью было получение равномерных по n, t оценок остаточного члена второго порядка $g(n,t)$ сверху и снизу в области, задаваемой условиями

$$0 < \frac{t}{\sqrt{n}} < A,\ 0 < t < t_{\max},\quad ,n \ge n_0. \qquad (2.2)$$

где $A, t_{\max}, n_0$ – некоторые параметры. С помощью оценок остаточных членов в формулах, получаемых при преобразовании (2.1) к предельному виду, сформулированная выше цель была достигнута [371]. Для различных наборов параметров $A, t_{\max}, n_0$ получены равномерные по n, t оценки (сверху и снизу) остаточного члена второго порядка $g(n,t)$ в области (2.2). Так, например, при $A = 0{,}5$, $t_{\max} = 1{,}73$, $n_0 = 8$ нижняя граница равна (- 0,71), а верхняя есть 2,65.

Основными недостатками такого подхода являются: во-первых, зависимость оценок от параметров $A, t_{\max}, n_0$, задающих границы областей; во-вторых, завышение оценок, обусловленное желанием получить равномерные оценки по обширной области. Поэтому при составлении рассчитанной на практическое использование методики [136] проверки однородности двух выборок с помощью статистики Смирнова (по заказу Госстандарта СССР) мы перешли на «методологию заданной точности», которую кратко можно описать следующим образом:

1) выбираем малое положительное p, например $p = 0{,}05$ или $p = 0{,}20$;

2) приводим точные значения $H(n, t)$ для всех значений n таких, что $|H(n, t) - exp(-t^2)| > p\ exp(-t^2)$;

3) если же последнее неравенство не выполнено, то вместо $H(n, t)$ используем предельное значение $exp(-t^2)$.

Таким образом, принятая в методике [136] методология предполагает интенсивное использование вычислительной техники. Результатами расчетов являются *граничные значения* объемов выборок $n(p,t)$ такие, что при меньших значениях объемов выборок рекомендуется пользоваться точными значениями функции распределения статистики Смирнова, а при больших – предельными.

Оценки скорости сходимости. Теоретические оценки скорости сходимости в различных задачах прикладной математической статистики иногда формулируют без привязки к возможности практического использования. Так, в 1960 – 1970-х гг. была популярна задача оценки скорости сходимости распределения классической статистики омега-квадрат (Крамера-Мизеса-Смирнова). Для максимума модуля разности допредельной и предельной функций распределения этой статистики различные авторы доказывали, что для любого e>0 существует константа $C(e)$ такая, что он не превосходит $C(e)n^{-w+e}$. Прогресс состоял в увеличении константы w - последовательно для w = $^1/_{10}$, $^1/_6$, $^1/_5$, $^1/_4$, $^1/_3$, $^1/_2$ и 1 (описание работ и ссылки даны в §2.3 нашей монографии [170] и в [369]).

Последовательное улучшение теоретических оценок скорости сходимости дает надежду на быструю реальную сходимость. Действительно, численные расчеты показали, что предельным распределением для статистики омега-квадрат (Крамера-Мизеса-Смирнова) можно пользоваться уже при объеме выборки, равном 4.

Использование датчиков псевдослучайных чисел. Если же предельное распределение известно, то возникает возможность изучить скорость сходимости численно методом статистических испытаний (Монте-Карло). Однако при этом обычно возникают две проблемы.

Во-первых, откуда известно, что скорость сходимости монотонна? Если при данном объеме выборки различие мало, то будет ли оно мало и при дальнейших объемах? Иногда отклонения допредельного распределения от предельного объясняются довольно сложными причинами. Так, для распределения хи-квадрат они связаны с нерешенной теоретико-числовой проблемой оценки числа целых точек в эллипсоиде растущего диаметра.

Во-вторых, с помощью датчиков псевдослучайных чисел получаем допредельные распределения с погрешностью, которая может преуменьшать различие. Поясним мысль аналогией. Растущий сигнал измеряется с погрешностями. Когда можно гарантировать, что его величина наверняка превзошла заданную границу? Например, если погрешность на n-ом шаге равна $1/n$, то погрешность монотонно убывает и становится бесконечно малой, в то время как сумма погрешностей безгранично растет.

Проблема качества датчиков псевдослучайных чисел продолжает оставаться открытой (см. гл.11 в [200]). Для моделирования в пространствах фиксированной размерности датчики псевдослучайных чисел решают поставленные задачи. Но для рассматриваемых здесь задач размерность не фиксирована – неизвестно, при каком объеме выборки можно переходить к предельному распределению согласно «методологии заданной точности».

Нужны дальнейшие работы по изучению качества датчиков псевдослучайных чисел в задачах неопределенной размерности. Мы применяли псевдослучайных чисел при изучении помех, создаваемых электровозами (см. монографию [170]), при изучении статистических критериев проверки однородности двух выборок — см. работу [81]).

Сделаем два замечания. В работе [110] сравниваются два плана контроля надежности технических изделий. Оказывается, что при объемах выборки, меньших 150, лучше первый план, а при объемах, больших 150 – второй. Значит, если бы сравнивались эти планы при достаточно большом объеме выборки n = 100, то лучшим был бы признан первый план, что неверно – наступит момент (объем выборки), когда лучшим станет второй.

Другое замечание – из [15]. Будем суммировать бесконечный ряд с членами $1/n$. Поскольку члены его убывают, то типовые алгоритмы остановят вычисления на каком-то шагу. А сумма-то — бесконечна!

Принцип уравнивания погрешностей состоит в том, что погрешности различной природы должны вносить примерно одинаковый вклад в общую погрешность математической модели. Так, определение рационального объема выборки в статистике интервальных данных основано на уравнивании влияния метрологической и статистической погрешностей. Согласно подходу [170] выбор числа градаций в социологических анкетах целесообразно проводить на основе уравнивания погрешностей квантования и неопределенности в ответах респондентов. В классической модели управления запасами целесообразно уравнять влияние неточностей в определении параметров на отклонение целевой функции от оптимума. Для этой модели из принципа уравнивания погрешностей следует, что относительные погрешности определения параметров модели должны совпадать. Погрешность, порожденная отклонением спроса от линейного, оценивается по данным об отпуске товаров. Это дает возможность оценить допустимые отклонения для других параметров. В частности, установить, что расхождения между методиками их определения не являются существенными (см. раздел 5.5 и [170]).

В терминах общей схемы устойчивости рассмотрим для простоты записи случай двух параметров. Пусть $A = [0, \infty)\times[0,\infty)$ и $E(x, \theta) = E(x, (\varepsilon, \delta))$, где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ задают точность определения соответствующих параметров, так что $E(x,(\varepsilon_1,\delta_1)) \subseteq E(x,(\varepsilon_2,\delta_2))$ при $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, $\delta_1 \leq \delta_2$. Пусть ε задано, а δ исследователь может выбрать, причем известно, что уменьшение δ связано с увеличением расходов. Как выбирать δ? Представляется естественным «уравнять» отклонения, порожденные различными параметрами, т.е. определить δ из условия

$$\beta(x, E(x, (\varepsilon, \delta)) - \beta(x, E(x, (\varepsilon, 0)) \approx \beta(x, E(x, (\varepsilon, 0)). \qquad (2.3)$$

Если затраты и полезный эффект точно известны, то δ можно определить путем решения соответствующей оптимизационной задачи. В противном случае соотношение (2.3) предлагается использовать в качестве эвристического правила.

2.3. Целеполагание, выбор экономико-математической модели и характеризация моделей с дисконтированием

При разработке стратегии развития предприятия одна из основных проблем – целеполагание. Поскольку естественных целей обычно несколько, то при построении формализованных экономико-математических моделей приходим к задачам многокритериальной оптимизации. Поскольку очевидно, что одновременно по нескольким критериям оптимизировать невозможно (невозможно добиться максимальной прибыли при минимуме затрат), то для адекватного применения ЭММиМ необходимо тем или иным образом перейти к однокритериальной постановке (либо, выделив множество оптимальных по Парето альтернатив, применить экспертные технологии выбора).

При разработке управленческих решений с целью совместного учета и соизмерении различных факторов, частичного снятия неопределенности широко используются рейтинги. В частности, для сведения к однокритериальной постановке могут быть применены методы построения единого (интегрального) критерия (рейтинга). Термин «рейтинг» происходит от английского «to rate» (оценивать) и «rating» (оценка, оценивание). Оценка – это число, градация качественного признака (удовл,, хор., отл.), реже – упорядочение (ранжировка) или математический объект иной природы.

Согласно [86, с.8]: «В современном понимании *рейтинг* – это комплексная оценка состояния субъекта, которая позволяет отнести его к некоторым классу или категории. Списки субъектов, ранжированные по величине одного показателя, зачастую в России публикуемые под названием «рейтинг», принято называть *рэнкинг*». Это мнение демонстрирует существование разногласий в связи с содержанием термина «рейтинг». Отметим также трудность различения терминов «рейтинг» и «рэнкинг», поскольку «одним показателем» может оказаться именно «комплексная оценка». Кроме того, при большом числе классов (или категорий) размывается различие между попаданием в класс и числовой оценкой. Ранг – место в упорядоченном ряду – это один из видов комплексной оценки. Тем не менее имеется достаточное согласие в среде специалистов для того, чтобы использовать термин «рейтинг» как синоним термина «интегральный (единый, обобщенный, системный) критерий (оценка, показатель)», позволяющий сравнивать объекты (субъекты) с интересующей пользователя (этим термином) точки зрения. В частности, рейтинги целесообразно использовать при целеполагании (для соизмерения целей).

Математические теории рейтингов. Опишем многообразие различных видов рейтингов. Методологический анализ опирается на выделение следующих трех вариантов постановок задач:

1. Непосредственная оценка (рейтинг).

2. Оценка с использованием обучающих выборок.

3. Оценка на основе системы показателей с весовыми коэффициентами

Под непосредственной оценкой понимаем постановку задачи, в которой итоговый результат получается при непосредственной обработке некоторого множества оценок экспертов (чисел или элементов иных множеств), без привлечения дополнительной информации о тех или иных объектах или об оценках (весах) каких-либо факторов (признаков). Пример - усреднение чисел. Каким средним пользоваться – средним арифметическим или медианой? Или иными – средним геометрическим и т.п. Некоторые ответы дает теория измерений (раздел 4.3). При усреднении других видов ответов экспертов теория усложняется. Например, усреднение бинарных отношений может проводиться путем расчета медианы Кемени (см. раздел 5.1). При этом может варьироваться как вид меры близости (расстояние Кемени, или его квадрат, или аналог на основе коэффициента ранговой корреляции Спирмена, или *D*-метрика и т.п.), так и множество бинарных отношений, по которому проводится минимизация [210].

Для оценки с использованием обучающих выборок применяют теорию классификации - линейный дискриминантный анализ Р. Фишера, непараметрический дискриминантный анализ на основе использования непараметрических оценок плотностей в пространствах произвольной природы, а также иные методы распознавания образов с учителем, в том числе нейросетевые.

При оценке на основе системы показателей с весовыми коэффициентами основные составляющие процедур - показатели (факторы), индексы и границы. Для построения системы показателей, обычно иерархической (единичные показатели – групповые – обобщенный) применяют экспертные методы и статистические (формальные) методы выделения информативного подмножества признаков. Способы усреднения (расчета индексов) при переходе от единичных показателей к групповым и от групповых к обобщенному выбирают на основе тех же принципов, что и при непосредственной оценке, но с использованием взвешенных средних. Веса задают либо непосредственно, либо косвенно – с помощью экспертных упорядочений, парных сравнений или обучающих выборок (экспертно-статистический метод). Границы задают градации, на основе которых принимают решения.

Бинарные рейтинги. Важный частный случай - бинарные рейтинги, когда рейтинговая оценка принимает два значения. Объект оценки с помощью бинарного рейтинга относится к одному из двух классов. Следовательно, теория бинарных рейтингов – часть дискриминантного анализа, имеющего целью отнесение объекта к одному из двух классов. Классы предполагаются заданными - плотностями вероятностей или обучающими выборками.

Обсудим случай, когда рейтинговая оценка принимает два значения, для простоты изложения, 0 и 1. Именно такие рейтинги называем далее *бинарными.* Иногда строят рейтинг в виде функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от единичных показателей (факторов) $x_1, x_2, \ldots, x_m$. , а для принятия решения используют некоторый порог K. Принимают определенное решение, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) < K$, и альтернативное, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq K$. В этом случае для принятия решения используется бинарный рейтинг вида $g(f(x_1, x_2, \ldots, x_m))$, где функция g принимает два значения, а именно, $g(z) = 0$ при $z < K$ и $g(z) = 1$ при $z \geq K$.

На основе бинарных рейтингов можно сконструировать рейтинг с большим числом градаций. Пусть рейтинговая оценка h принимает одно из трех значений $A < B < C$. С ней можно связать два бинарных рейтинга p и q, таких, что для первого из них $p = 0$ при $h < C$ и $p =1$ при $h = C$, для второго $q = 0$ при $h < B$ и $q =1$ при $h \geq B$. Ясно, что $h = A$ тогда и только тогда, когда $p = q =0$, и $h = C$ тогда и только тогда, когда $p =q =1$, в то время как $h = B$ тогда и только тогда, когда $p =0$, $q = 1$. Таким образом, использование рейтинга h с тремя возможными значениями эквивалентно использованию двух бинарных рейтингов p и q.

Объект оценки с помощью бинарного рейтинга относится к одному из двух классов. Следовательно, теория бинарных рейтингов – часть дискриминантного анализа, имеющего целью отнесение объекта к одному из двух классов [179, 355]. Классы предполагаются заданными - плотностями вероятностей или обучающими выборками.

Вероятностно-статистические методы диагностики, как и статистические методы в целом, делятся на параметрические и непараметрические. Первые основаны на предположении, что классы описываются распределениями из некоторых параметрических семейств. Обычно рассматривают многомерные нормальные распределения, при этом зачастую без обоснования принимают гипотезу о том, что ковариационные матрицы для различных классов совпадают. Именно в таких предположениях сформулирован классический дискриминантный анализ Р.Фишера. Как известно, обычно не только нет теоретических оснований считать, что наблюдения извлечены из нормального распределения, но и проверка статистических гипотез согласия с нормальным законом дает отрицательный результат. Известно также, что по выборкам, объем которых не превосходит 50, нельзя сделать обоснованный вывод о принадлежности к нормальному закону [283].

Поэтому более корректными, чем параметрические, являются непараметрические методы диагностики. Исходная идея таких методов основана на лемме Неймана-Пирсона, входящей в стандартный курс математической статистики. Согласно этой лемме решение об отнесении вновь поступающего объекта к одному из двух классов принимается на основе отношения плотностей $f(x)/g(x)$, где $f(x)$ - плотность распределения, соответствующая первому классу, а $g(x)$ - плотность распределения, соответствующая второму классу.

Если плотности распределения неизвестны, то применяют их непараметрические оценки, построенные по обучающим выборкам. Пусть обучающая выборка объектов из первого класса состоит из n элементов, а обучающая выборка для второго класса - из m объектов. Тогда рассчитывают значения непараметрических оценок плотностей $f_n(x)$ и $g_m(x)$ для первого и второго классов соответственно, а диагностическое решение принимают по их отношению [202]. Достоинством таких рейтингов является их универсальность, возможность применения без необходимости обоснования трудно проверяемых условий (например, нормальности распределения характеристик объектов оценки). Недостатком является отсутствие явных формул, задающих рейтинг в виде конкретной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от единичных показателей (факторов) $x_1, x_2, \ldots, x_m$, описывающих объект оценки.

Есть и иные методы, в частности, основанные на использовании нейросетей для диагностики и рейтингования [102].

Проблема сравнения рейтингов. Популярны линейные рейтинги $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m$ в виде линейной функции от единичных показателей (факторов, критериев) $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называют коэффициентами важности (весомости, значимости). Их определяют либо экспертным путем, либо по статистическим данным, используя обучающие выборки. Глубокая теория качественной и количественной важности критериев развита В.В. Подиновским [251].

По одним и тем же данным могут быть построены различные рейтинги. Например, с помощью обучающих выборок можно построить непараметрический бинарный рейтинг (заданный алгоритмически) и линейный рейтинг (по Р.Фишеру). В той же прикладной задаче может оказаться полезным также и линейный рейтинг на основе экспертных оценок коэффициентов.

Результаты обработки реальных данных с помощью некоторого алгоритма диагностики в случае двух классов описываются долями: правильной диагностики в первом классе κ (она приближается к вероятности правильной классификации $\kappa(\infty)$); правильной диагностики во втором классе λ (как оценки вероятности $\lambda(\infty)$), долями классов в объединенной совокупности $\pi_i,\ i=1,2,\ \pi_1+\pi_2=1$.

Нередко как показатель качества алгоритма диагностики (прогностической «силы») используют долю правильной диагностики $\mu=\pi_1\kappa+\pi_2\lambda$. Однако показатель μ определяется, в частности, через характеристики π_1 и π_2, частично заданные исследователем (например, на них влияет тактика отбора образцов для изучения). При диагностике тяжести заболевания алгоритм группы исследователей под руководством акад. И.М. Гельфанда оказался хуже тривиального - объявить всех больных легкими, не требующими специального наблюдения. Причина появления нелепости понятна. Хотя доля тяжелых больных невелика, но смертельные исходы сосредоточены именно в этой группе больных. Поэтому целесообразна гипердиагностика - рациональнее часть легких больных объявить тяжелыми, чем наоборот.

Итак, долю правильной диагностики μ нецелесообразно использовать как показатель качества алгоритма диагностики.

Для сравнения рейтингов (алгоритмов диагностики) предлагаем использовать (эмпирическую) прогностическую силу $\delta^* = \Phi(d^*/2)$, где $d^* = \Phi^{-1}(\kappa) + \Phi^{-1}(\lambda)$. Здесь $\Phi(x)$ - функция стандартного нормального распределения вероятностей с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, а $\Phi^{-1}(y)$ - обратная ей функция. При росте объемов выборок распределение δ^* является асимптотически нормальным [210]. Это позволяет указывать доверительные границы для теоретической прогностической силы $\delta = \Phi(d/2)$, где $d = \Phi^{-1}(\kappa(\infty)) + \Phi^{-1}(\lambda(\infty))$.

Как проверить обоснованность использования прогностической силы? Возьмем два значения порога K_1 и K_2. Тогда теоретические прогностические силы должны совпадать: $\delta(K_1) = \delta(K_2)$. Выполнение этого равенства можно проверить как статистическую гипотезу по разработанным нами алгоритмам. Обсудим эти предложения подробнее.

Показатель качества классификации. Итак, для выявления информативного набора признаков целесообразно использовать *метод пересчета на модель линейного дискриминантного анализа,* согласно которому статистической оценкой прогностической силы является

$\delta^* = \Phi(d^*/2),\ \ d^* = \Phi^{-1}(\kappa) + \Phi^{-1}(\lambda),$

где $\Phi(x)$ - функция стандартного нормального распределения вероятностей с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, а $\Phi^{-1}(y)$ - обратная ей функция.

Пример 1. Если доли правильной классификации κ = 0,90 и λ = 0,80, то $\Phi^{-1}(\kappa)$ = 1,28 и $\Phi^{-1}(\lambda)$ = 0,84, откуда d^* = 2,12 и прогностическая сила δ^* = $\Phi^{-1}(1{,}06)$ = 0,86. При этом доля правильной классификации μ может принимать любые значения между 0,80 и 0,90, в зависимости от доли элементов того или иного класса среди анализируемых данных.

Если классы описываются выборками из многомерных нормальных совокупностей с одинаковыми матрицами ковариаций, а для классификации применяется классический линейный дискриминантный анализ Р.Фишера, то величина d^* представляет собой состоятельную статистическую оценку так называемого расстояния Махаланобиса [173] между рассматриваемыми двумя совокупностями (конкретный вид этого расстояния сейчас не имеет значения), независимо от порогового значения, определяющего конкретное решающее правило. В общем случае показатель δ^* вводится как эвристический.

Пусть алгоритм классификации применялся к совокупности, состоящей из *m* объектов первого класса и *n* объектов второго класса. Справедливо [210] следующее утверждение: для всех *x*

$$P\left\{\frac{\delta^*-\delta}{A(\kappa,\lambda)} < x\right\} \to \Phi(x),$$

при безграничном росте объемов обучающих выборок, $m,\ n \to \infty$. где δ - истинная «прогностическая сила» алгоритма диагностики; δ^* - ее эмпирическая оценка,

$$A^2(\kappa,\lambda) = \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{\varphi(d^*/2)}{\varphi(\Phi^{-1}(\kappa))}\right]^2 \frac{\kappa(1-\kappa)}{m} + \left[\frac{\varphi(d^*/2)}{\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))}\right]^2 \frac{\lambda(1-\lambda)}{n}\right\};$$

(здесь $\varphi(x) = \Phi^{'}(x)$ - плотность стандартного нормального распределения вероятностей с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

С помощью этого утверждения по κ и λ обычным образом определяют доверительные границы для «прогностической силы» δ.

Пример 2. В условиях примера 1 при $m = n = 100$ найдем асимптотическое среднее квадратическое отклонение $A(0{,}90;\ 0{,}80)$.

Поскольку $\varphi(\Phi^{-1}(\kappa)) = \varphi(1{,}28) = 0{,}176$, $\varphi(\Phi^{-1}(\lambda)) = \varphi(0{,}84) = 0{,}280$, $\varphi(d^*/2) = \varphi(1{,}06) = 0{,}227$, то подставляя в выражение для A^2 численные значения, получаем, что

$$A^2(0{,}90;\ 0{,}80) = \frac{0{,}0372}{m} + \frac{0{,}0265}{n}.$$

При $m = n = 100$ имеем $A(0{,}90;\ 0{,}80) = 0{,}0252$. При доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ имеем $u(0{,}95) = \Phi^{-1}(1{,}0{,}975) = 1{,}96$, а потому нижняя доверительная граница для прогностической силы δ есть $\delta_{\text{Н}} = 0{,}86 - 1{,}96 \times 0{,}0252 = 0{,}81$, а верхняя доверительная граница такова: $\delta_{\text{В}} = 0{,}86 + 1{,}96 \times 0{,}0252 = 0{,}91$. Аналогичный расчет при $m = n = 1000$ дает $\delta_{\text{Н}} = 0{,}845$, $\delta_{\text{В}} = 0{,}875$.

Как проверить обоснованность пересчета на модель линейного дискриминантного анализа? Допустим, что классификация состоит в вычислении некоторого прогностического индекса y и сравнении его с заданным порогом c. Объект относят к первому классу, если $y \leq c$, ко второму, если $y > c$. Прогностический индекс – это обычно линейная функция от характеристик рассматриваемых объектов. Другими словами, от координат векторов, описывающих объекты.

Возьмем два значения порога c_1 и c_2. Если пересчет на модель линейного дискриминантного анализа обоснован, то , как можно показать, «прогностические силы» для обоих правил совпадают: $\delta(c_1) = \delta(c_2)$. Выполнение этого равенства можно проверить как статистическую гипотезу.

Пусть κ_1 - доля объектов первого класса, для которых $y \le c_1$, а κ_2 - доля объектов первого класса, для которых $c_1 < y \le c_2$. Аналогично пусть λ_2 - доля объектов второго класса, для которых $c_1 < y \le c_2$, а λ_3 - доля объектов второго класса, для которых $y > c_2$. Тогда можно рассчитать две оценки одного и того же расстояния Махаланобиса. Они имеют вид:

$$d^*(c_1) = \Phi^{-1}(\kappa_1) + \Phi^{-1}(\lambda_2 + \lambda_3), \quad d^*(c_2) = \Phi^{-1}(\kappa_1 + \kappa_2) + \Phi^{-1}(\lambda_3).$$

Нами установлено [210], что если прогностические силы двух правил диагностики совпадают, $\delta(c_1) = \delta(c_2)$, то при $m \to \infty, n \to \infty$ при всех x

$$P\left\{\frac{d^*(c_1) - d^*(c_2)}{B} < x\right\} \to \Phi(x),$$

где

$$B^2 = \frac{1}{m}T(\kappa_1;\kappa_2) + \frac{1}{n}T(\lambda_3;\lambda_2);$$

$$T(x;y) = \frac{x(1-x)}{\varphi^2(\Phi^{-1}(x))} + \frac{(x+y)(1-x-y)}{\varphi^2(\Phi^{-1}(x+y))} - \frac{2x(1-x-y)}{\varphi(\Phi^{-1}(x))\varphi(\Phi^{-1}(x+y))}.$$

Из последнего утверждения вытекает метод проверки рассматриваемой гипотезы: при выполнении неравенства

$$\left|\frac{d^*(c_1) - d^*(c_2)}{B}\right| \le \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

она принимается на уровне значимости, асимптотически равном α, в противном случае - отвергается.

Пример 3. Пусть данные примеров 1 и 2 соответствуют порогу c_1. Пусть порогу c_2 соответствуют κ' = 0,95 и λ' = 0,70. Тогда в обозначениях теоремы 3 $\kappa_1 = 0{,}90$, $\kappa_2 = 0{,}05$, $\lambda_2 = 0{,}10$, $\lambda_3 = 0{,}70$. Далее $d^*(c_1) = 2{,}12$ (пример 1), $d^*(c_2) = 2{,}17$, $T(\kappa_1, \kappa_2) = 2{,}22$, $T(\lambda_3, \lambda_2) = 0{,}89$. Гипотеза о совпадении прогностических сил на двух порогах принимается на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{0{,}05^2}{\frac{2{,}22}{m}+\frac{0{,}89}{n}} \le 1{,}96^2,$$

т.е. когда

$$\frac{2{,}22}{m}+\frac{0{,}89}{n} \ge 0{,}00065.$$

Так, гипотеза принимается при $m = n = 1000$ и отвергается при $m = n = 5000$.

Кроме теории бинарных рейтингов, рассмотрим подробнее использование того или иного результата хозяйственной деятельности в качестве рейтинга промышленного предприятия или интегрированной производственно-хозяйственной структуры.

Характеризация моделей с дисконтированием. Пусть динамику развития рассматриваемой экономической системы можно описать последовательностью $x_1, x_2, ..., x_m$, где переменные x_j, $j = 1, 2, ..., m$, лежат в некотором пространстве X, возможно, достаточно сложной природы. Надо отметить также, что положение экономической системы в следующий момент не может быть произвольным, оно связано с положением в предыдущий момент. Проще всего принять, что существует некоторое множество K такое, что $(x_j, x_{j+1}) \in K, j = 1,2,...,m-1$. Результат экономической деятельности за j-й период описывается величиной $f_j(x_j, x_{j+1})$. Зависимость не только от начального и конечного положения, но и от номера периода объясняется тем, что через номер периода осуществляется связь с общей (внешней) экономической ситуацией. Желая максимизировать суммарные результаты экономической деятельности, приходим к постановке стандартной задачи динамического программирования:

$$F_m(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{1\le j\le m-1} f_j(x_j, x_{j+1}) \to \max, \quad (x_j, x_{j+1}) \in K, j = 1,2,...,m-1. \qquad (2.4)$$

При обычных математических предположениях максимум достигается.

Широко применяются модели, приводящие к следующему частному случаю задачи (2.4):

$$F_m(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{1 \le j \le m-1} \alpha^{j-1} f(x_j, x_{j+1}) \to \max, \qquad (x_j, x_{j+1}) \in K,\ j = 1,2,...,m-1\,. \qquad (2.5)$$

Это - модели с дисконтированием (α - дисконт-фактор). Естественно выяснить, какими «внутренними» свойствами выделяются задачи типа (2.5) из всех задач типа (2.4).

Представляет интерес изучение и сравнение между собой планов возможного экономического поведения на k шагов $X_1 = (x_{11}, x_{21}, ..., x_{k1})$ и $X_2 = (x_{12}, x_{22}, ..., x_{k2})$. Естественно сравнение проводить с помощью описывающих результаты экономической деятельности функций, участвующих в задачах (2.4) и (2.5): план X_1 лучше плана X_2 при реализации с момента i, если

$$f_i(x_{11}, x_{21}) + f_{i+1}(x_{21}, x_{31}) + ... + f_{i+k-1}(x_{(k-1)1}, x_{k1}) > \qquad (2.6)$$

$$> f_i(x_{12}, x_{22}) + f_{i+1}(x_{22}, x_{32}) + ... + f_{i+k-1}(x_{(k-1)2}, x_{k2}).$$

Будем писать $X_1 R(i) X_2$, если выполнено неравенство (2.6), где $R(i)$ - бинарное отношение на множестве планов, задающее упорядочение планов отношением «лучше при реализации с момента i».

Ясно, что упорядоченность планов на k шагов, определяемая с помощью бинарного отношения $R(i)$, может зависеть от i, т.е. «хорошесть» плана зависит от того, с какого момента i он начинает осуществляться. Для реальной экономики это понятно: планы действий, рациональные для стабильного развития, нецелесообразно применять во время гиперинфляции. И наоборот, приемлемые в период гиперинфляции операции не принесут эффекта в стабильной обстановке.

Однако, как легко видеть, в моделях с дисконтированием (2.5) все упорядочения $R(i)$ совпадают, i = 1,2, …, m-k. Оказывается - это и есть основной результат настоящего подраздела - верно и обратное: если упорядочения совпадают, то мы имеем дело с задачей (2.5) - с задачей с дисконтированием, причем достаточно совпадения только при $k = 1,2$. Сформулируем предположения об устойчивости упорядочения планов.

(I). Пусть $(x, y) \in K, (x', y') \in K$. Верно одно из двух: либо $f_i(x, y) > f_i(x', y')$ для всех $i = 1,2,...,m-1$, либо $f_i(x, y) \le f_i(x', y')$ для всех $i = 1,2,...,m-1$.

(II). Пусть $(x, y) \in K, (y, z) \in K, (x', y') \in K, (y', z') \in K$. Верно одно из двух: либо $f_i(x, y) + f_i(y, z) > f_i(x', y') + f_i(y', z')$ для всех $i = 1,2,...,m-2$, либо $f_i(x, y) + f_i(y, z) \le f_i(x', y') + f_i(y', z')$ для всех $i = 1,2,...,m-2$.

Нами установлено [213, 368], что из условий устойчивости упорядоченности планов (I) и (II) следует существование констант $\alpha > 0$ и $d_j, j = 2,3,...,m-1$, таких, что $f_j(x, y) = \alpha^{j-1} f_1(x, y) + d_j, j = 2,3,...,m-1$. Поскольку прибавление константы не меняет точки, в которой функция достигает максимума, то последнее соотношение означает, что условия устойчивости упорядоченности планов (I) и (II) характеризуют (другими словами, однозначно выделяют) модели с дисконтированием среди всех моделей динамического программирования. Другими словами, устойчивость хозяйственных решений во времени эквивалентна использованию моделей с дисконтированием; применяя модели с дисконтированием, предполагаем, что экономическая среда стабильна; если прогнозируем существенное изменение взаимоотношений хозяйствующих субъектов, то вынуждены отказаться от использования моделей типа (2.5). Использование таких характеристик инвестиционного проекта, как чистая текущая стоимость *NPV*, рационально лишь при предположении об устойчивости хозяйственных решений во времени, в частности, решений о сравнении двух инвестиционных проектов: если первый из них выгоднее второго при начале реализации проектов в 2008 г., то первый из них будет выгоднее второго и при переносе начала реализации на 2010 г. Научно-технический прогресс, изменение структуры экономики ставят под сомнение гипотезу об устойчивости хозяйственных решений во времени. А потому ставится под сомнение и адекватность чистой текущей стоимости *NPV* и связанных с ней величин как характеристик инвестиционного проекта. Этот научный результат (характеризация моделей с дисконтированием) подтверждает общий вывод о необходимости принятия решений о целесообразности реализации инвестиционных проектов на основе всей совокупности социальных, технологических, экологических, экономических и политических факторов (СТЭЭП-факторов) [217, 220, 238].

2.4. Проблема горизонта планирования и асимптотически оптимальные планы

Проблема горизонта планирования. Интенсивная разработка экономико-математических моделей различных систем хозяйствующих субъектов приводит к выявлению проблем, которые при обсуждении на словесном уровне остаются в тени. Модели, выраженные в точных терминах, используют понятие «горизонт планирования», т.е. временной интервал, в течение которого моделируется динамика экономических величин. Если начало отсчета определить сравнительно просто, например, приняв за него сегодняшний момент или начало выполнения первого из действий, предусмотренных проектными материалами (в случае инвестиционных проектов), то, как пишет С.А. Смоляк (ЦЭМИ РАН), «значительно хуже дело обстоит с моментом завершения проекта» [295, с.8]. Действительно, на сколько лет вперед планировать? На три? На пять? На десять? До 2020 г.?

От горизонта планирования зависят принимаемые решения и соответствующие этим решениям экономические результаты. Например, при коротком периоде планирования целесообразны лишь инвестиции (капиталовложения) в оборотные фонды предприятия, и лишь при достаточно длительном периоде – в основные фонды. Однако однозначный выбор горизонта планирования обычно не может быть обоснован, это – нечисловая экономическая величина. Предлагаем справиться с противоречием путем использования асимптотически оптимальных планов.

Рассмотрим модель (2.5) раздела 2.3 с $\alpha = 1$, т.е. модель без дисконтирования

$$F_m(x_1, x_2,...., x_m) = \sum_{1 \le j \le m-1} f(x_j, x_{j+1}) \to \max, \ (x_j, x_{j+1}) \in K, \quad j = 1,2,..., m-1.$$

При каждом *m* существует оптимальный план $(x_1(m), x_2(m),..., x_m(m))$, при котором достигает максимума оптимизируемая функция. Поскольку выбор горизонта планирования, как правило, нельзя рационально обосновать, хотелось бы построить план действий, близкий к оптимальному плану при различных горизонтах планирования. Это значит, что целью является построение бесконечной последовательности $(y_1, y_2,...)$ такой, что ее начальный отрезок длины *m,* т.е. $(y_1, y_2,... y_m)$, дает примерно такое же значение оптимизируемого функционала, как и значение для оптимального плана $(x_1(m), x_2(m),..., x_m(m))$. Бесконечную последовательность $(y_1, y_2,...)$ с указанным свойством назовем асимптотически оптимальным планом.

Выясним, можно ли использовать для построения асимптотически оптимального плана непосредственно оптимальный план. Зафиксируем *k* и рассмотрим последовательность $x_k(m)$, *m* = 1, 2, ... Примеры показывают, что, во-первых, элементы в этой последовательности будут меняться; во-вторых, они могут не иметь пределов [170]. Следовательно, оптимальные планы могут вести себя крайне нерегулярно, а потому в таких случаях их нельзя использовать для построения асимптотически оптимальных планов.

Нами установлено существование асимптотически оптимальных планов: можно указать такие бесконечные последовательности $(y_1, y_2,...)$, что

$$\lim_{m \to \infty} \frac{F_m(x_1(m), x_2(m),..., x_m(m))}{F_m(y_1, y_2,... y_m)} = 1.$$

С помощью такого подхода решается проблема горизонта планирования - надо использовать асимптотически оптимальные планы, не зависящие от горизонта планирования. Оптимальная траектория движения состоит из трех участков - начального, конечного и основного, а основной участок - это движение по магистрали (аналогия с типовым движением автотранспорта). Сформулированные утверждения выполнены в весьма широких предположениях, выполненных для практически всех хозяйствующих субъектов [168, 170, 368]. Поскольку настоящая работа посвящена прежде всего методологическим вопросам ЭММиМ (см. раздел 1.5), то укажем, что цикл соответствующих теорем приведен в разделе 5.5 «Асимптотически оптимальные планы» монографии [170, с.258 - 275].

В качестве конкретного примера можно указать на полученный в разделе 5.5 научный результат, касающейся классической модели управления запасами (модели Вильсона). Нами установлено, что размер партии товара, задаваемый известной формулой квадратного корня, почти всегда не является оптимальным, однако соответствующий план поставок является *асимптотически* оптимальным, что и оправдывает широкое использование указанной формулы.

Для иллюстрации положения «Оптимальная траектория движения состоит из трех участков - начального, конечного и основного, а основной участок - это движение по магистрали» рассмотрим модель оптимизации процесса обучения (на основе принципа максимума Понтрягина).

Модель управления обучением. В качестве примера конкретной модели процесса управления рассмотрим модель распределения времени между овладением знаниями и развитием умений [167].

Любое знание состоит частично из «информации» («чистое знание») и частично из «умения» («знаю как»). Умение – это мастерство, это способность использовать имеющиеся у вас сведения для достижения своих целей; умение можно еще охарактеризовать как совокупность определенных навыков, в конечном счете, умение – это способность методически работать [253, с.308].

Пусть $x(t)$ – объем сведений, накопленных учащимся к моменту времени t («чистое знание»), $y(t)$ – объем накопленных умений: умений рассуждать, решать задачи, разбираться в излагаемом преподавателем материале; $u(t)$ – доля времени, отведенного на накопление знаний в промежутке времени $(t;\ t+dt)$.

Естественно считать, что увеличение $x(t+dt)$ – $x(t)$ объема знаний учащегося пропорционально потраченному на это времени $u(t)dt$ и накопленным умениям $y(t)$. Следовательно,

$$\frac{dx(t)}{dt} = k_1 u(t)\, y(t), \qquad (2.7)$$

где коэффициент $k_1 > 0$ зависит от индивидуальных особенностей учащегося.

Увеличение знаний за то же время пропорционально потраченному на это времени $(1 - u(t))dt$, имеющимся умениям $y(t)$ и знаниям $x(t)$. Следовательно,

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_2 (1 - u(t))\, x(t)\, y(t). \qquad (2.8)$$

Коэффициент $k_2 > 0$ также зависит от индивидуальности. Учащийся тем быстрее приобретает умения, чем больше он уже знает и умеет. Тем быстрее усваивает знания, чем больше умеет. Но нельзя считать, что чем больше они запомнил, тем быстрее запоминает. На правую часть уравнения (2.7) влияют только приобретенные в прошлом активные знания, примененные при решении задач и перешедшие в умения. Отметим, что модель (2.7) – (2.8) имеет смысл применять на таких интервалах времени, чтобы, например, пять минут можно было считать бесконечно малой величиной.

Можно управлять процессом обучения, выбирая при каждом t значение функции $u(t)$ из отрезка [0; 1]. Рассмотрим две задачи.

1. Как возможно быстрее достигнуть заданного уровня знаний x_1 и умений y_1? Другими словами, как за кратчайшее время перейти из точки фазовой плоскости $(x_0; y_0)$ в точку $(x_1; y_1)$?

2. Как быстрее достичь заданного объема знаний, т.е. выйти на прямую $x = x_1$?

Двойственная задача: за заданное время достигнуть как можно большего объема знаний. Оптимальные траектории движения для второй задачи и двойственной к ней совпадают (двойственность понимается в обычном для математического программирования смысле [50]).

С помощью замены переменных $z = k_2x$, $w = k_1k_2y$ перейдем от системы (2.7) – (2.8) к более простой системе без неизвестных коэффициентов:

$$\frac{dz}{dt} = uw, \quad \frac{dw}{dt} = (1-u)zw \quad . \qquad (2.9)$$

(Описанная линейная замена переменных эквивалентна переходу к другим единицам измерения знаний и умений, своим для каждого учащегося.)

Решения задач 1 и 2, т.е. наилучший вид управления $u(t)$, находятся с помощью принципа максимума Л.С.Понтрягина [17]. В задаче 1 для системы (2.9) из этого принципа следует, что быстрейшее движение может происходить либо по горизонтальным (u = 1) и вертикальным (u = 0) отрезкам, либо по особому решению - параболе $w = z^2$ (u = 1/3). При $z_0^2 > w_0$ движение начинается по вертикальной прямой, при $z_0^2 < w_0$ - по горизонтальной, при $z_0^2 = w_0$ - по параболе. По каждой из областей $\{z^2 > w\}$ и $\{z^2 < w\}$ проходит не более одного вертикального и одного горизонтального отрезка.

Используя теорему о регулярном синтезе [30, с.266], можно показать, что оптимальная траектория выглядит следующим образом. Сначала надо выйти на «магистраль» - добраться до параболы $w = z^2$ по вертикальной (u = 0) или горизонтальной (u = 1) прямой. Затем пройти основную часть пути по магистрали (u = 1/3). Если конечная точка лежит под параболой, добраться до нее по горизонтали, сойдя с магистрали. Если она лежит над параболой, заключительный участок траектории является вертикальным отрезком. В частности, в случае $w_0 < z_0^2 < w_1 < z_1^2$ оптимальная траектория такова. Сначала надо выйти на магистраль – добраться по вертикальной (u = 0) прямой до параболы. Затем двигаться по магистрали (u = 1/3) от точки $(z_0; z_0^2)$ до точки $(\sqrt{w_1}; w_1)$. Наконец, по горизонтали (u = 1) выйти в конечную точку.

В задаче 2 из семейства оптимальных траекторий, ведущих из начальной точки (z_0; w_0) в точки луча (z_1; w_1), $w_0 \le w_1 < +\infty$, выбирается траектория, требующая минимального времени. При $z_1 \le 2z_0$ оптимально $w_1 = z_0 (z_1 - z_0)$, траектория состоит из вертикального и горизонтального отрезков. При $z_1 > 2z_0$ оптимально $w_1 = z_1^2/4$, траектория проходит по магистрали $w = z^2$ от точки $(z_0; z_0^2)$ до точки $(z_1/2; z_1^2/4)$. Чем большим объемом знаний z_1 надо овладеть, тем большую долю времени надо двигаться по магистрали, отдавая при этом 2/3 времени увеличению умений и 1/3 времени – накоплению знаний.

Полученное для основного участка траектории оптимального обучения значение u = 1/3 можно интерпретировать так: на одну лекцию должно приходиться два семинара, на 15 мин. объяснения 30 мин. решения задач. Результаты, полученные в математической модели, соответствуют эмпирическим представлениям об оптимальной организации учебного процесса. Кроме того, модель определяет численные значения доли времени (1/3), идущей на повышение знаний, и доли материала (1/2), излагаемого на заключительных лекциях (без проработки на семинарах).

При движении по магистрали, т.е. в течение основного периода учебного процесса, оптимальное распределение времени между объяснениями и решением задач одно и то же для всех учащихся, независимо от индивидуальных коэффициентов k_1 и k_2. Этот факт устойчивости оптимального решения показывает возможность организации обучения, оптимального одновременно для всех учащихся. Время движения до выхода на магистраль зависит от начального положения (x_0; y_0) и индивидуальных коэффициентов k_1 и k_2.

Таким образом, модель процесса управления обучением (2.7) – (2.8) позволила получить ряд практически полезных рекомендаций, в том числе выраженных в числовой форме. При этом не понадобилось уточнять способы измерения объемов знаний и умений, имеющихся у учащегося. Достаточно было согласиться с тем, что эти величины удовлетворяют качественным соотношениям, приводящим к уравнениям (2.7) и (2.8).

Ряд проблем организационно-экономического и экономико-математического моделирования процессов стратегического управления в промышленности рассмотрен нами в соответствующем разделе [134] и в учебниках по теории принятия решений [207, 213]. Сформулируем несколько важных идей.

Целеполагание – основа всякого стратегического управления. Если цель выбрана, то далее «включается» хорошо разработанный аппарат планирования (на основе прогнозирования) и либо менеджер получает путь к цели, либо убеждается, что при имеющихся ресурсах цель недостижима. Если же цель не определена, то дальнейшее развитие фирмы идет в соответствии с внешними воздействиями.

Принципиально важной является теорема о характеризации моделей с дисконтированием. Она показывает, в частности, что характеристики инвестиционных проектов, основанные на NPV (чистой текущей стоимости), предназначены для анализа стабильной ситуации. Поскольку современный мир принципиально нестабилен, то опора на подобные характеристики методологически неправильна и может привести к неправильным управленческим решениям. Выход известен: решения о начале реализации инвестиционного проекта или отказе от неё надо принимать на основе всей совокупности социальных, технологических, экологических, экономических, политических факторов.

Проблема горизонта планирования выявляется при применении экономико-математических методов и моделей. При составлении функционала, который будет максимизироваться, необходимо решить, какой временной промежуток он будет охватывать. Например, расчеты на основе NPV предполагают предварительный выбор числа слагаемых, т.е. продолжительности проекта. Но разве можно заранее предсказать, сколько лет проработает данный станок? Предсказать-то можно, но доверия названному числу не будет. В то же время при принятии решений на основе интуиции проблема горизонта планирования не попадает в поле зрения менеджера, и ему кажется, что такой проблемы нет.

Глава 3. Непараметрические статистические методы для решения конкретных задач управления предприятиями

3.1. О развитии и применении непараметрической статистики

Детерминированный и модельно-вероятностный подходы. При разработке и применении ЭММиМ есть два основных подхода к исходным данным – детерминированный и модельно-вероятностный. В первом из них данные рассматриваются сами по себе, без попыток связать их с какой-либо более общей хозяйственной ситуацией. Например, при анализе данных о производственной деятельности конкретного предприятия за конкретный период времени подсчитывается процент брака по конкретным технологическим процессам, число работников на различных должностях, объем реализованной продукции по месяцам. К этой же категории данных относятся различные виды отчетности – бухгалтерская, налоговая, статистическая (для органов Росстата). Преимуществом детерминированного подхода является отсутствие каких-либо дополнительных предположений о данных. Недостаток состоит в невозможности обоснованного переноса выводов с конкретной ситуации на другие, ей аналогичные. Например, на другие периоды времени или на другие предприятия. При детерминированном подходе невозможно также оценить погрешность рассчитанных характеристик.

Чтобы выйти за пределы единичной ситуации, необходимо использовать модельно-вероятностный подход, согласно которому основой алгоритмов расчетов является вероятностная модель порождения данных. При этом конкретные данные рассматриваются как реализации случайных величин, векторов, более общо – случайных элементов, т.е. как значения задающих их функций, определенных на вероятностном пространстве, в конкретной точке (элементарном событии ω).

Наиболее распространенная вероятностная модель порождения данных – это модель случайной выборки. Согласно этой модели данные x_1, x_2, … , x_n рассматриваются как реализации независимых одинаково распределенных случайных элементов (величин, векторов, множеств и других объектов нечисловой природы) $X_1 = X_1(\omega)$, $X_2 = X_2(\omega)$, … , $X_n = X_n(\omega)$, т.е. $x_1 = X_1(\omega_0)$, $x_2 = X_2(\omega_0)$, … , $x_n = X_n(\omega_0)$ при некотором ω_0 из пространства элементарных событий Ω. Модель выборки обычно используется для описания результатов независимых наблюдений, измерений, анализов, опытов.

В некоторых случаях используют более специальные модели порождения данных. Например, при проведении испытаний на надежность используют план испытаний, согласно которому испытания прекращаются через время T. Это значит, что фиксируются только моменты отказа изделий, которые произошли до момента T. Пусть x_1, x_2, … , x_n – наработки на отказ n изделий. Статистику доступны только значения y_1, y_2, … , y_n, где $y_j = x_j$ при $x_j < T$ и $y_j = T$ при $x_j \geq T$. Такая выборка, в которой часть описывающих реальное явление случайных величин заменена на граничное значение, называется цензурированной. Иногда используются и более сложные модели порождения данных. Например, если аппаратурой не фиксируются значения, меньшие некоторого порога, то выборка не только цензурирована, но и состоит из случайного числа элементов. Бывают и процедуры, когда минимальный и максимальный элементы выборки отбрасываются, а остальные предоставляются статистику, и т.д. [384].

Параметрические и непараметрические модели случайной выборки. Рассмотрим ситуацию, когда элементы выборки – числа. Модель описывается функцией распределения элементов выборки. Можно ли что-либо сказать об этой функции?

В литературе часто рассматривают различные параметрические семейства распределений числовых случайных величин. А именно – изучают семейства нормальных распределений, логарифмически нормальных, экспоненциальных, гамма-распределений, распределений Вейбулла-Гнеденко и др. Все они зависят от одного, двух или трех параметров. Поэтому для полного описания распределения достаточно знать или оценить одно, два или три числа. Широко развита и представлена в литературе параметрическая теория математической статистики, в которой предполагается, что распределения результатов наблюдений принадлежат тем или иным параметрическим семействам.

К сожалению, параметрические семейства существуют лишь в моделях, созданных исследователями. Ниже показано, что в реальной жизни их нет. Поэтому прикладная статистика использует в основном непараметрические методы, в которых распределения результатов наблюдений могут иметь произвольный вид (точнее, при построении непараметрических моделей не принимают предположения о том, что функции распределения результатов наблюдений принадлежат тому или иному семейству, описываемому небольшим (до 4, как в семействе Пирсона) числом параметров). В настоящем разделе на примере нормального распределения подробно обсудим невозможность практического использования параметрических семейств для описания распределений конкретных данных.

В главе 7 [210] разобраны параметрические методы отбраковки резко выделяющихся наблюдений и продемонстрирована невозможность практического использования ряда методов параметрической статистики, ошибочность выводов, к которым они приводят. В [205] и [210, гл.8] разработаны непараметрические методы доверительного оценивания основных характеристик числовых случайных величин – математического ожидания, медианы, дисперсии, среднего квадратического отклонения, коэффициента вариации (по заказу ВНИИ эластомерных материалов и изделий [65]). Метод моментов применен для проверки статистических гипотез [372].

К настоящему времени непараметрические методы полностью покрывают область задач, которые ранее решались с помощью параметрической статистики. Поэтому можно рекомендовать использовать только непараметрическую статистику. Однако в литературе много внимания уделяется параметрическим методам, поэтому обсудим обоснованность их практического применения.

Есть ли основания априори предполагать нормальность результатов измерений? Иногда утверждают, что в случае, когда погрешность измерения (или иная случайная величина) определяется в результате совокупного действия многих малых факторов, то в силу центральной предельной теоремы (ЦПТ) теории вероятностей эта величина хорошо приближается (по распределению) нормальной случайной величиной. Такое утверждение справедливо, если малые факторы действуют аддитивно и независимо друг от друга. Если же они действуют мультипликативно, то в силу той же ЦПТ аппроксимировать надо логарифмически нормальным распределением. В прикладных задачах обосновать аддитивность, а не мультипликативность действия малых факторов обычно не удается. Если же зависимость имеет общий характер, не приводится к аддитивному или мультипликативному виду, а также нет оснований принимать модели, дающие экспоненциальное, Вейбулла-Гнеденко, гамма или иные распределения, то о распределении итоговой случайной величины практически ничего не известно, кроме внутриматематических свойств типа регулярности.

Экспериментальное изучение распределений погрешностей. В научной школе известного метролога проф. П. В. Новицкого проведены исследования законов распределения различного рода погрешностей измерения. Он изучил распределения погрешностей электромеханических приборов на кернах, электронных приборов для измерения температур и усилий, цифровых приборов с ручным уравновешиванием. Объем выборок экспериментальных данных для каждого экземпляра составлял 100–400 отсчетов. Оказалось, что 46 из 47 распределений значимо отличались от нормального. Исследована форма распределения погрешностей у 25 экземпляров цифровых вольтметров Щ-1411 в 10 точках диапазона. Результаты аналогичны. Дальнейшие сведения содержатся в [162].

В лаборатории прикладной математики Тартуского государственного университета проанализировано 2500 выборок из архива реальных статистических данных. В 92% случаев гипотезу нормальности пришлось отвергнуть [210].

Приведенные описания экспериментальных данных показывают, что погрешности измерений в большинстве случаев имеют распределения, отличные от нормальных [376]. Это означает, в частности, что большинство применений критерия Стьюдента, классического регрессионного анализа и других статистических методов, основанных на нормальной теории, строго говоря, не является обоснованным, поскольку неверна лежащая в их основе аксиома нормальности распределений соответствующих случайных величин.

Очевидно, для оправдания или обоснованного изменения существующей практики анализа статистических данных требуется изучить свойства процедур анализа данных при «незаконном» применении. Изучение процедур отбраковки показало [380], что они крайне неустойчивы к отклонениям от нормальности, а потому применять их для обработки реальных данных нецелесообразно (см. гл.7 [210]); поэтому нельзя утверждать, что произвольно взятая процедура устойчива к отклонениям от нормальности.

Иногда предлагают перед применением, например, критерия Стьюдента однородности двух выборок проверять нормальность. Хотя для этого имеется много критериев, но проверка нормальности – более сложная и трудоемкая статистическая процедура, чем проверка однородности (как с помощью статистик типа Стьюдента, так и с помощью непараметрических критериев). Для достаточно надежного установления нормальности требуется весьма большое число наблюдений. Так, чтобы гарантировать, что функция распределения результатов наблюдений отличается от некоторой нормальной не более, чем на 0,01 (при любом значении аргумента), требуется порядка 2500 наблюдений [210]. В большинстве экономических, технических, медико-биологических и других прикладных исследований число наблюдений существенно меньше. Особенно это справедливо для данных, используемых при изучении проблем обеспечения безопасности функционирования экономических структур и технических объектов.

Центральная предельная теорема (ЦПТ) и нормальность. Иногда пытаются использовать ЦПТ для приближения распределения погрешности к нормальному, включая в технологическую схему измерительного прибора специальные сумматоры. Оценим полезность этой меры. Пусть Z_1 , Z_2 ,…, Z_k – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения H = $H(x)$ такие, что $M(Z_1)=0,\, D(Z_1)=1,\, M\,|\,Z_1\,|^3=\rho<+\infty$. Рассмотрим

$$w=\frac{Z_1+Z_2+...+Z_k}{\sqrt{k}}.$$

Показателем обеспечиваемой сумматором близости к нормальности является

$$C=\sup_H \sup_x |\,P(w<x)-\Phi(x)\,|.$$

Тогда

$$0{,}3989\frac{\rho}{\sqrt{k}}\le C\le 0{,}7975\frac{\rho}{\sqrt{k}}.$$

Правое неравенство в последнем соотношении вытекает из оценок константы в неравенстве Берри-Эссеена, полученном в книге [20, с.172] (в работе И.Г. Шевцовой 2008 г. [336] 0,7975 заменено на 0,7005), а левое – из примера в монографии [247, с.140–141]. Для нормального закона ρ = 1,6, для равномерного ρ = 1,3, для двухточечного ρ = 1 (это – нижняя граница для ρ). Следовательно, для обеспечения расстояния (в метрике Колмогорова) до нормального распределения не более 0,01 для «неудачных» распределений необходимо не менее k_0 слагаемых, где

$$0{,}4\sqrt{k_0}<0{,}01,\; k_0>1600.$$

В обычно используемых сумматорах слагаемых значительно меньше.

Отметим, что результат любого реального измерения записывается с помощью конечного числа десятичных знаков. Данные конкретного исследования качества подшипников, приведенные в [72], принимают значения от 1,0 до 2,2, т.е. всего 13 возможных значений. Из принципа Дирихле следует, что в какой-то точке построенная по данным работы [72] дискретная функция распределения отличается от ближайшей функции нормального распределения не менее чем на $^1/_{26}$, т.е. на 0,04. Для нормального распределения случайной величины вероятность попасть в дискретное множество десятичных чисел с заданным числом знаков после запятой равна 0.

Итак, реальные распределения почти всегда отличаются от тех, которые включены в параметрические семейства. Отличия могут быть большими или меньшими, но они почти всегда есть. Каково влияние этих отличий на свойства процедур анализа данных? Иногда исчезает при росте объемов данных, как для процедур, рассмотренных в разд.3.2, иногда является заметным (разд.3.3), иногда делает процедуру необоснованной (как для отбраковки выбросов [210]). Следовательно, надо либо использовать непараметрические процедуры [308], либо изучать устойчивость основанных на параметрических моделях процедур по отношению к отклонениям распределений результатов наблюдений от предпосылок модели, т.е. изучать робастность статистических процедур (от *robust* (англ.) – крепкий, грубый).

3.2. Непараметрические статистические методы прогнозирования

По мнению одним из основоположников научного менеджмента Анри Файоля: «Управлять - значит прогнозировать и планировать, организовывать, руководить командой, координировать и контролировать» [313, 314].

Прогнозирование - это взгляд в будущее, оценка возможных путей развития, последствий тех или иных решений. Планирование же - это разработка последовательности действий, позволяющей достигнуть желаемого. Результаты прогнозирования необходимы для планирования.

В социально-экономической области обычно не удается дать однозначный обоснованный прогноз. Причины - неопределённости в различных аспектах производственной и экономической ситуации. Анализ источников неопределенностей проведен в разделе 1.4.

В современных условиях хозяйственной независимости промышленных предприятий для многих из них прогнозирование стало весьма актуальным [147]. Так, при составлении плана производства важны не только возможности предприятия, но и спрос на выпускаемую продукцию. Прогнозирование – частный вид моделирования как основы познания и управления [200, 287, 288, 352].

При управлении предприятием первично необходимо прогнозировать:

- поведение государства,
- поведение потребителей,
- поведение поставщиков,
- поведение конкурентов,
- научно-технический прогресс.

Вторичными прогнозируемыми показателями, зависящими от первичных и определяющими успешное существование промышленного предприятия в краткосрочной и долгосрочной перспективе, являются:

- величина прибыли,
- объем реализации,
- рентабельность активов,
- фондоотдача,
- производительность труда и т.д.

Наличие неопределенностей у этих факторов значительно усложняют процесс управления промышленным предприятием.

На выбор конкретного метода (или методов) прогнозирования влияют:

- ✓ существо проблемы, подлежащей решению;
- ✓ динамические характеристики объекта прогнозирования;
- ✓ вид и характер информационного обеспечения;
- ✓ выбранный период упреждения прогноза (и его соотношение с продолжительностью цикла разработки товара или услуги);
- ✓ требования к результатам прогнозирования (точности, надежности и достоверности) [45].

Среди методов прогнозирования базисными являются две группы - статистические [214, 365] и экспертные (см.раздел 5.1).

Непараметрический метод наименьших квадратов: учет сезонности. Рассмотрим непараметрическую задачу восстановления зависимости, которая описывается суммой линейного тренда и сезонной составляющей, т.е. периодической функции с известным периодом. Нами получены асимптотические распределения оценок параметров и трендовой составляющей, найдено математическое ожидание остаточной суммы квадратов, разработаны методы оценивания сезонной компоненты и построения интервального прогноза [218].

Пусть t – независимая переменная (например, время), а x – зависимая (например, индекс инфляции, курс доллара США, объем месячного производства или размер дневной выручки торговой точки). Рассмотрим задачу восстановления зависимости $x = x(t)$ на основе – набора n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1,2,\ldots,n$, где t_k — значения независимой переменной, а x_k – соответствующие им значения зависимой переменной.

Восстанавливать зависимость можно на основе различных моделей. В простейшей из них предполагается, что переменная x линейно зависит от переменной t с точностью до погрешностей измерения, т.е.

$$x_i = a\,(t_i - \bar{t}\,) + b + e_i\,,\ i = 1,2,\dots,n, \qquad (3.1)$$

где a и b – параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k – погрешности, искажающие зависимость. Среднее арифметическое моментов времени

$$\bar{t} = (t_1 + t_2 + \ldots + t_n\,)\,/\,n$$

введено в модель для облегчения дальнейших выкладок.

Обычно оценивают параметры a и b линейной зависимости методом наименьших квадратов. Затем восстановленную зависимость используют для точечного и интервального прогнозирования.

Метод наименьших квадратов был разработан К. Гауссом в 1795 г. [90, с.37]. (Как сказано в [126, с.181], «Гаусс указывает две даты: 1794 г. и 1795 г. Современные исследователи склонны считать, что верная дата – это 1794 г.») Согласно этому методу для расчета наилучшей функции, приближающей линейным образом зависимость x от t в модели (3.1), следует рассмотреть функцию двух переменных

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a(t_i - \bar{t}) - b)^2\ .$$

Оценки метода наименьших квадратов (кратко: оценки МНК) - это такие значения a^* и b^*, при которых функция $f(a,b)$ достигает минимума по всем значениям аргументов. Они имеют вид

$$a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(t_i - \bar{t})}{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(t_i - \bar{t})}{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2}, \quad b^* = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \quad (3.2)$$

Известен ряд иных равносильных выражений [200, п.5.1] для рассматриваемых оценок. Оценки МНК (3.2) получены в детерминированной постановке.

Свойства оценок МНК естественно изучать на основе той или иной вероятностно-статистической *модели порождения данных*, например [200, п.5.1]): значения независимой переменной t детерминированы, а погрешности e_k, $k = 1,2,\ldots,n,$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2, неизвестной статистику.

В литературе все еще распространено предположение о нормальности распределения погрешностей. Однако давно известно, что распределения реальных данных, как правило, отличаются от нормальных (см. раздел 3.1 и [200, п. 4.1]). Именно поэтому рассматриваем непараметрическую модель.

В дальнейшем неоднократно будем использовать Центральную Предельную Теорему (ЦПТ) теории вероятностей для величин e_k, $k = 1,2,\ldots,n$ (с весами), поэтому для выполнения ее условий необходимо предположить, например, что погрешности e_k, $k = 1,2,\ldots,n,$ финитны или имеют конечный третий абсолютный момент. В [200, п.5.1], доказана асимптотическая нормальность и независимость оценок МНК (3.2), что позволило разработать методы доверительного оценивания функции $x(t)$ и проверки статистических гипотез о значениях параметров линейной зависимости.

Прикладное значение имеют различные обобщения рассмотренной модели. Например, дисперсии погрешностей могут быть различны (что соответствует взвешенной сумме квадратов); погрешности могут быть зависимы, например, описываться с помощью случайных процессов, как это распространено в моделях временных рядов; сама зависимость может быть произвольной, и тогда для ее оценивания естественно использовать непараметрические ядерные оценки плотности [200, п.5.2].

Отметим принципиальное отличие всех упомянутых моделей от тех, в которых переменная t рассматривается как случайная величина. Например, когда исходные данные (t_k, x_k), $k = 1,2,\ldots,n,$ - выборка из двумерного распределения, т.е. независимые одинаково распределенные случайные вектора. Или когда каждая из координат измерена со случайной ошибкой (модель конфлюэнтного анализа). Укажем также на модели восстановления зависимостей в статистике интервальных данных (см. главу 4 и [210, 213]).

Из всего многообразия моделей восстановления зависимостей рассмотрим модели с периодическими составляющими.

При анализе экономических данных возникает необходимость использования моделей временных рядов, включающих три составляющие: трендовую (T), периодическую, или сезонную, циклическую (S) и случайную (E). Длина периода предполагается известной – год, неделя, сутки (в зависимости от существа прикладной задачи). Рассматривают (см., например, [256]) аддитивную модель $T + S + E$ и мультипликативную модель $T \times S \times E$.

Простейшая аддитивная модель имеет вид

$$x_k = a\,(t_k - \bar{t}) + b + e_k = a\,(t_k - \bar{t}) + b + f(t_k) + E_k,\ k = 1,2,\ldots,n. \quad (3.3)$$

Здесь трендовая составляющая – линейная функция $a\,(t_k - \bar{t}) + b$; периодическая составляющая $f(t)$ описывает сезонность, случайная составляющая представлена слагаемыми E_k, которые можно считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2, неизвестной статистику. Модель (3.3) переходит в модель (3.1), если положить

$$e_k = f(t_k) + E_k, = 1,2,\ldots,n.$$

В отличие от модели, изученной в [200, п.5.1], погрешности e_k в модели (3.3) не являются одинаково распределенными. Однако их распределения отличаются лишь сдвигами (на значения $f(t_k)$).

Соответствующая мультипликативная модель имеет вид

$$y_k = [Bt_k^a] \times f_1(t_k) \times [1 + \varepsilon_k],\ \ k = 1,2,\ldots,n\,. \quad (3.4)$$

В (3.4) сомножители имеют описанный выше смысл. При логарифмировании модель (3.4) переходит в аналог модели (3.3).

Практическая значимость модели (3.3) очевидна. Однако распространенные расчетные методы, например, описанные в [256], являются эвристическими. Сказанное определяет цель настоящего подраздела - ***построить непараметрическую теорию прогноза временного ряда на базе линейного тренда с учетом аддитивной модели сезонности.***

Следуя эвристическому подходу [256], изучим асимптотическое поведение оценок МНК a^* и b^*, заданных формулами (3.2), установим их асимптотическую нормальность, а затем состоятельно оценим периодическую составляющую $f(t)$ и построим интервальный прогноз для $x(t)$. В частности, выявится целесообразность анализа данных за полное число лет (периодов). В отличие от [188] (см. также [200, п.6.3], [210, п.10.2]), длину периода оценивать не требуется.

Асимптотическая теория. Из формулы (3.2) следует, что в принятых выше предположениях и обозначениях

$$b^* = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t}) + b + \sum_{i=1}^{n} e_i = b + \sum_{i=1}^{n} e_i = b + \sum_{i=1}^{n} f(t_i) + \sum_{i=1}^{n} E_i\,. \quad (3.5)$$

Согласно ЦПТ оценка b^* имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием $b + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)$ и дисперсией σ^2/n, оценка которой приводится ниже.

Из формул (3.2) и (3.5) вытекает, что

$$x_i - \bar{x} = a(t_i - \bar{t}) + b + e_i - b - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i\,,$$

$$(x_i - \bar{x})(t_i - \bar{t}) = a(t_i - \bar{t})^2 + e_i(t_i - \bar{t}) - \frac{(t_i - \bar{t})}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i\,.$$

Последнее слагаемое во втором соотношении при суммировании по i обращается в 0, поэтому

$$a^* = a + b + \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = a + \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i E_i, \quad c_i = \frac{(t_i - \bar{t})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}. \quad (3.6)$$

Формулы (3.6) показывают, что оценка a^* является асимптотически нормальной с математическим ожиданием $a + \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i)$ и дисперсией

$$D(a^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(E_i) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}.$$

Отметим, что многомерная нормальность имеет быть, когда каждое слагаемое в формуле (3.6) мало сравнительно со всей суммой, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} \frac{|t_i - \bar{t}|}{\left\{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2\right\}^{1/2}} = 0. \quad (3.7)$$

Условие (3.7) выполнено, если t_i образуют арифметическую прогрессию, число членов которой безгранично растет.

Итак, дисперсии оценок МНК параметров a^* и b^* линейного тренда – те же, что и при отсутствии сезонных искажений. Их математические ожидания зависят от периодической составляющей. Однако в случае

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t}) f(t_i) = 0 \qquad (3.8)$$

оценки a^* и b^* являются несмещенными.

Условия (3.8) являются принципиально важными - необходимыми и достаточными для несмещенности и состоятельности оценок a^* и b^*.

Первое из условий (3.8) можно считать выполненным, если t_i образуют арифметическую прогрессию, причем целое число шагов составляет один период (например, если измерения проводятся ежемесячно или раз в квартал, а период - год), и, кроме того, данные взяты за целое число периодов. Действительно, тогда естественно принять, что сумма значений периодической составляющей за период равна 0, поскольку в противном случае можно было бы скорректировать свободный член (т.е. по тем же соображениям, по которым принято условие нулевого математического ожидания случайных составляющих E_i).

Для справедливости второго из условий (3.8) достаточно добавить к сказанному предположения симметричности множества $\{t_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$ относительно $\bar{t}$ (например, начала года) и четности периодической составляющей $f(t)$ относительно той же точки. Последнее выполнено, если, например, график $f(t)$ симметричен относительно середины года.

Несмещенность (в предположениях (3.8)) и асимптотическая нормальность оценок метода наименьших квадратов позволяют легко указывать для них асимптотические доверительные границы и проверять статистические гипотезы, например, о равенстве 0 или иным значениям.

Из формул (3.5) и (3.6) следует, что при справедливости (3.8)

$$M\{a^*(t-\bar{t})+b^*\} = M(a^*)(t-\bar{t})+M(b^*) = a(t-\bar{t})+b,$$

т.е. оценка $y^*(t) = a^*(t - \bar{t}) + b^*$ трендовой составляющей $y(t) = a(t - \bar{t}) + b$ рассматриваемой зависимости является несмещенной. Поэтому

$$D(y^*(t) = D(a^*)(t-\bar{t})^2 + 2M\{(a^*-a)(b^*-b)(t-\bar{t})\} + D(b^*).$$

При этом, поскольку погрешности E_i независимы в совокупности и $M(E_i) = 0$, то

$$M\{(a^*-a)(b^*-b)(t-\bar{t})\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i(t-\bar{t})M(E_i^2) = \frac{1}{n}(t-\bar{t})\sigma^2\sum_{i=1}^{n} c_i = 0.$$

Таким образом,

$$D(y^*(t)) = \sigma^2\left\{\frac{1}{n} + \frac{(t-\bar{t})^2}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}\right\}. \qquad (3.9)$$

Итак, оценка $y^*(t)$ является несмещенной и асимптотически нормальной. Для ее использования (построения доверительных интервалов, проверки гипотез) необходимо оценить остаточную дисперсию $M(E_i^2) = \sigma^2$. Доверительные нижняя и верхняя границы для трендовой составляющей таковы:

$$y_{нижн}(t) = a^*(t-\bar{t}) + b^* - \delta(t), \;\; y_{верх}(t) = a^*(t-\bar{t}) + b^* + \delta(t),$$

где полуширина доверительного интервала $\delta(t)$ имеет вид

$$\delta(t) = U(\gamma)\sqrt{D^*(y^*(t))} = U(\gamma)\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t-\bar{t})^2}{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}}, \qquad (3.10)$$

Здесь γ - доверительная вероятность, $U(\gamma)$ - квантиль нормального распределения порядка $(1+\gamma)/2$. При γ = 0,95 (наиболее применяемое значение) имеем $U(\gamma)$ = 1,96. В формуле (3.10) $D^*(y^*(t))$ - состоятельная оценка дисперсии $y^*(t)$. В соответствии с (3.9) она является произведением состоятельной оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ на известную статистику детерминированную функцию от t.

Периодическая составляющая и прогноз. В точках t_k, k = 1,2,…,n, имеются исходные значения зависимой переменной x_k и восстановленные значения $y^*(t_k)$. Рассмотрим остаточную сумму квадратов

$$SS = \sum_{i=1}^{n}(y^*(t_i) - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\{(a^* - a)(t_i - \bar{t}) + (b^* - b) - f(t_i) - E_i\}^2 .$$

При отсутствии периодической составляющей используют [200, пп. 5.1, 5.2] состоятельные оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ, построенные на основе остаточной суммы квадратов

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}} \quad \text{или} \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n-2}} .$$

В соответствии с формулами (3.5) и (3.6) при справедливости условий (3.8)

$$SS = \sum_{i=1}^{n}\left\{(t_i - \bar{t})\sum_{j=1}^{n}c_j E_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E_j - f(t_i) - E_i\right\}^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(c_j(t_i - \bar{t}) + \frac{1}{n}\right)E_j - f(t_i) - E_i\right\}^2 = \sum_{i=1}^{n}SS_i .$$

Найдем математическое ожидание каждого из слагаемых:

$$M(SS_i) = M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(c_j(t_i - \bar{t}) + \frac{1}{n}\right)E_j - f(t_i) - E_i\right\}^2 = M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(c_j(t_i - \bar{t}) + \frac{1}{n}\right)E_j\right\}^2 -$$

$$-2M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(c_j(t_i-\bar{t})+\frac{1}{n}\right)E_j\right\}(f(t_i)+E_i)+M(f(t_i)+E_i)^2.$$

Поскольку E_i независимы, одинаково распределены и имеют нулевое математическое ожидание, то

$$M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(c_j(t_i-\bar{t})+\frac{1}{n}\right)E_j\right\}^2=\sum_{j=1}^{n}\left(c_j(t_i-\bar{t})+\frac{1}{n}\right)^2\sigma^2.$$

Далее,

$$-2M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(c_j(t_i-\bar{t})+\frac{1}{n}\right)E_j\right\}(f(t_i)+E_i)=-2\left(c_i(t_i-\bar{t})+\frac{1}{n}\right)\sigma^2.$$

Наконец,

$$M(f(t_i)+E_i)^2=f^2(t_i)+\sigma^2.$$

На основе трех последних равенств можно показать, что при выполнении условия асимптотической нормальности (3.7)

$$\lim_{n\to\infty}M(SS_i)=f^2(t_i)+\sigma^2.$$

Следовательно,

$$M\left(\frac{SS}{n}\right)=\sigma^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f^2(t_i). \qquad (3.11)$$

В правой части (3.11) первое слагаемое соответствует вкладу случайной составляющей, второе – вкладу периодической составляющей.

В некоторых случаях второе слагаемое в правой части (3.9) может быть известно из опыта или же оценено экспертами, однако в большинстве ситуаций целесообразно исходить из оценки сезонной составляющей.

Перейдем к ее оцениванию. Рассматривают как параметрические, так и непараметрические подходы. Один из методов исходит из того, что достаточно гладкую функцию можно разложить в ряд Фурье и получить хорошее приближение с помощью небольшого числа гармоник. Простейший случай – одна гармоника. Так, динамику индекса инфляции можно попытаться изучать с помощью модели

$$x_k=a(t_k-\bar{t})+b+f(t_k)+E_k=a(t_k-\bar{t})+b+d\cos(2\pi t_k)+E_k,\ k=1,2,\ldots,n$$

(время t измеряется в годах). Тогда неизвестные параметры a, b, d оцениваются методом наименьших квадратов.

Однако обычно нет оснований предполагать, что периодическая составляющая входит в то или иное параметрическое семейство функций. Приходится строить непараметрические модели. Опишем одну из них.

Пусть в согласии с предположениями (3.8) рассматривается целое число периодов, т.е. $n = mq$, где n – объем наблюдений, m – количество периодов, q – число наблюдений в одном периоде. Предполагается, что первые q моментов наблюдения при сдвиге на длину периода дают следующие q моментов времени, при сдвиге на две длины периода дают третий набор из q моментов наблюдения, и т. д. Тогда в соответствии с определением периодической составляющей справедливы равенства

$$f(t_k) = f(t_{q+k}) = f(t_{2q+k}) = ... = f(t_{(m-1)q+k}), \ k = 1,2,...,q \ . \qquad (3.12)$$

Пусть g_k - общее значение в (3.12). Требуется оценить g_1, g_2, …, g_q.

Естественный подход состоит в том. чтобы усреднить m значений (x_i – $y^*(t_i)$) (т.е. исходные данные, «очищенные» от трендовой составляющей), соответствующих моментам времени, отстоящим друг от друга на целое число периодов. Речь идет об оценках

$$g_k^* = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{k+(j-1)q} - y^*(t_{k+(j-1)q})), \ k = 1,2,...,q \ . \qquad (3.13)$$

Оценка периодической составляющей распространяется на весь интервал наблюдений очевидным образом:

$$f^*(t_k) = f^*(t_{q+k}) = f^*(t_{2q+k}) = ... = f^*(t_{(m-1)q+k}) = g_k^*, \ k = 1,2,...,q \ . \qquad (3.14)$$

Сложив восстановленные значения трендовой и периодической составляющей, получим оценку зависимости, «очищенную» от случайной составляющей

$$x^*(t) = y^*(t) + f^*(t) = a^*(t - \bar{t}) + b^* + f^*(t) \ . \qquad (3.15)$$

Здесь оценки a^* и b^* находят по формулам (3.2), а оценки $f^*(t)$ – по формулам (3.13) – (3.14).

С помощью формулы (3.15) можно строить точечный прогноз, используя ее вне интервала наблюдений. Для этого достаточно распространить сезонную составляющую $f^*(t)$ вплоть до рассматриваемого момента времени по правилу (3.14) и суммировать ее с прогнозом трендовой составляющей $y^*(t)$. Интерполяцию и экстраполяцию на моменты времени t, не входящие в исходное множество $\{t_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ и множества, полученные из него сдвигами на целое число периодов, осуществляют линейной интерполяцией ближайших значений или иным методом.

Обсудим свойства оценок (3.13) – (3. 15). При безграничном росте объема данных и справедливости условий (3.7) и (3.8) оценки a^* и b^* параметров трендовой составляющей являются состоятельными и несмещенными, а потому суммы (3.13) оценивают периодическую составляющую состоятельно и несмещенно. Как следствие,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[f^*(t_i)]^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^2(t_i) \to 0 \qquad (3.16)$$

по вероятности при $n \to \infty$. В соответствии с (3.11) последнее соотношение дает возможность оценить σ^2, а затем построить интервальный прогноз для трендовой составляющей согласно (3.10).

Как правило, n растет, увеличиваясь на величины, кратные q – числу наблюдений в одном периоде. Как следствие, уменьшаемое в (3.16) – константа, зависимости от n нет. Это связано с тем, что выполнение условий (3.8) обычно обеспечено рассмотрением целого числа периодов.

Рассмотрим оценки (3.13) подробнее. Согласно (3.3), (3.12) и (3.13),

$$g_k^* = f(t_k) - (a^* - a)\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(t_{k+(j-1)q} - \bar{t}) - (b^* - b) + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} E_{k+(j-1)q},\ k = 1,2,\ldots,q.$$

С учетом (3.5), (3.6) и (3.8) получаем, что

$$g_k^* = f(t_k) - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i E_i\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(t_{k+(j-1)q} - \bar{t})\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} E_{k+(j-1)q},\ k = 1,2,\ldots,q.$$

Таким образом,

$$g_k^* = f(t_k) + \sum_{i=1}^{n} h_{ik} E_i, \ \ k = 1,2,...,q \qquad (3.17)$$

где $h_{ik} = -c_i r_k - \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, если $i \in \{k + (j-1)q, j = 1,2,...,m\}$, и $h_{ik} = -c_i r_k - \frac{1}{n}$ при всех остальных значениях индекса суммирования i, где $r_k = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(t_{k+(j-1)q} - \bar{t})$.

Соотношение (3.17) означает, что рассматриваемые оценки есть суммы независимых случайных величин, а потому с помощью Центральной Предельной Теоремы можно построить доверительные интервалы для рассматриваемых значений периодической составляющей (в предположении справедливости условий (3.7)).

Перейдем к построению интервального прогноза. Точечный прогноз строят по формуле (3.12) на основе $x^*(t)$ - оценки зависимости, «очищенной» от случайной составляющей, но включающей трендовый и периодический компоненты. Если выполнены условия (3.8), то

$Mx^*(t) = x(t) = a\,(t - \bar{t}) + b + f(t)$,

т.е. оценка $x^*(t)$ является несмещенной.

При справедливости условий (3.8) с учетом (3.5), (3.6) и (3.17) получаем, что для момента времени t, входящего в множество $\{t_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ или в множества, полученные из него сдвигами на целое число периодов,

$$x^*(t) - x(t) = (t - \bar{t})\sum_{i=1}^{n} c_i E_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i + \sum_{i=1}^{n} h_{ik} E_i. \qquad (3.18)$$

В (3.18) при определении значений коэффициентов h_{ik} в качестве k следует взять номер наименьшего из исходных моментов времени $\{t_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, отстоящих от рассматриваемого момента t на целое число периодов. С помощью (3.17) заключаем, что

$$x^*(t) - x(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ik} E_i,$$

где $w_{ik} = c_i(t - \bar{t} - r_k) + \frac{1}{m}$, если $i \in \{k + (j-1)q, j = 1,2,...,m\}$, и $w_{ik} = c_i(t - \bar{t} - r_k)$ при всех остальных значениях индекса суммирования i, где r_k – то же, что и в формуле (3.17).

В правой части формулы (3.18) стоит сумма независимых случайных величин, поэтому оценка $x^*(t)$ является асимптотически нормальной (при справедливости (3.7)) с математическим ожиданием $x(t)$ и дисперсией

$$D(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} w_{ik}^2 D(E_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_{ik}^2 . \qquad (3.19)$$

Следовательно, нижняя и верхняя доверительные границы для прогностической функции (с учетом как трендовой, так и периодической составляющих) имеют вид:

$$x_{нижн}(t) = a^*(t - \bar{t}) + b^* + f^*(t) - \Delta(t), \quad x_{верх}(t) = a^*(t - \bar{t}) + b^* + f^*(t) + \Delta(t),$$

где

$$\Delta(t) = U(\gamma)\sqrt{D^*(x^*(t))} = U(\gamma)\sigma^* \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_{ik}^2} . \qquad (3.20)$$

В формуле (3.20) $D^*(x^*(t))$ - состоятельная оценка дисперсии точечного прогноза $x^*(t)$. В соответствии с (3.19) она является произведением состоятельной оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ случайных погрешностей E_i на известную статистику детерминированную функцию от t. Величину σ^* рассчитывают согласно (3.11) и (3.16).

Сравним параметрический и непараметрический подходы. В параметрической вероятностной модели предполагается, что погрешности имеют нормальное распределение, что позволяет математически строго получить ряд выводов. Так, распределения статистик вычисляются точно, а не в асимптотике, соответственно вместо квантилей нормального распределения при вычислении доверительных интервалов используются квантили распределения Стьюдента. При росте объема данных различия стираются. Непараметрический подход не использует нереалистическое предположение о нормальности погрешностей. Платой за это является асимптотический характер результатов. В случае простейшей модели метода наименьших квадратов оба подхода дают практически совпадающие рекомендации. Это не всегда так, не всегда два подхода дают близкие результаты. Например, в задаче обнаружения выбросов методы, опирающиеся на нормальное распределение, нельзя считать обоснованными, и обнаружено это при непараметрическом подходе ([200, п.4.2], [210, п.7.2]).

Кратко сформулируем несколько общих принципов построения, описания и использования статистических методов анализа данных. Во-первых, должны быть четко сформулированы исходные предпосылки, т.е. полностью описана используемая вероятностно-статистическая модель. Во-вторых, не следует принимать предпосылки, которые редко выполняются на практике. В-третьих, алгоритмы расчетов должны быть корректны с точки зрения математико-статистической теории. В-четвертых, алгоритмы должны давать полезные для практики выводы.

Применительно к задаче восстановления зависимостей это означает, что целесообразно применять непараметрический подход, что и сделано выше. Однако предположение нормальности, хотя и очень сильно сужает возможности обоснованного практического применения, с чисто математической точки зрения позволяет продвинуться дальше. Поэтому для первоначального изучения ситуации, так сказать, «в лабораторных условиях», нормальная модель может оказаться полезной.

По сравнению с эвристическими алгоритмами [256] разработанная здесь теория позволила:

1) дать обоснование разработанным алгоритмам в рамках асимптотических методов математической статистики и указать условия их применимости (формула (3.7));

2) выявить принципиально важные условия (3.8), необходимые и достаточные для несмещенности и состоятельности оценок;

3) построить доверительные интервалы для зависимости (прогностической функции) и ее трендовой составляющей.

В рамках математической статистики удается провести анализ не всех распространенных эвристических алгоритмов. Так, довольно часто рекомендуют вначале провести сглаживание («выравнивание») временного ряда, например, методом скользящих средних [256, с.137]. При этом периодическая (сезонная) составляющая меняется, а погрешности (отклонения от суммы трендовой и периодической составляющих) становятся зависимыми, что делает невозможным применение описанных выше методов.

Пример применения непараметрического метода наименьших квадратов в модели с периодической составляющей. Обработаем фактические данные ОАО «Магнитогорский металлургический комбинат» о закупочных ценах на лом черных металлов [108]. Для облегчения расчетов оставим из каждого квартала данные только по одному месяцу. Введем условные моменты времени, а именно, будем измерять время в кварталах, начиная с первого квартала 2003 г. Исходные данные для демонстрации примера применения непараметрического метода наименьших квадратов в модели с периодической составляющей - пары чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, 12$, - представлены в табл.3.1 в столбцах (3) и (4) соответственно.

По формулам (3.2) найдем оценки параметров a^* и b^*, что позволяет построить оценку трендовой составляющей

$y^*(t) = a^*(t - \bar{t}\,) + b^* =212{,}26\ (t – 6{,}5) + 3967{,}17 = 212{,}26\ t + 2587{,}48.$

Численные значения трендовой составляющей даны в столбце (5) табл.3.1.

Рассчитав отклонения исходных значений закупочных цен от оценок трендовой составляющей (столбец (6) табл.3.1), возведя их в квадрат и сложив, получаем остаточную сумму квадратов SS = 4 539 214 и $SS/n = SS/12$ = 378 267,83.

Сгруппировав отклонения исходных значений закупочных цен от оценок трендовой составляющей по месяцам (табл.3.2), наглядно убеждаемся в наличии периодической составляющей. Взяв среднее арифметическое отклонений от тренда за конкретный месяц, рассчитываем оценку $f*(t_s)$ периодической составляющей. Результаты приведены в табл.3.2.

Таблица 3.1

Построение модели прогнозирования цен на лом марки 3А

№ п/п	Период	Условные моменты времени	Закупочные цены, руб./т	Оценка тренда	Отклонения от оценки тренда	Восстановленные значения	Кажущиеся невязки
k		t_k	x_k	$y*(t_k)$	x_k -$y*(t_k)$	x_k^*	$x_k - x_k^*$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	янв.03	1	2 750	2 800	- 50	2 424	326
2	апр.03	2	3 800	3 012	788	3 545	255
3	июл.03	3	2 900	3 224	- 324	2 655	245
4	окт.03	4	3 100	3 437	- 337	3 848	- 748
5	янв.04	5	2 761	3 649	- 888	3 273	- 512
6	апр.04	6	4 602	3 861	741	4394	208
7	июл.04	7	3 540	4 073	- 533	3504	36
8	окт.04	8	5 268	4 286	982	4 697	571
9	янв.05	9	4 307	4 498	- 191	4 122	185
10	апр.05	10	4 779	4 710	69	5 243	- 464
11	июл.05	11	4 071	4 922	- 851	4 353	- 280
12	окт.05	12	5 723	5 135	588	5546	177

Рассчитав оценки периодической составляющей на весь интервал времени и сложив их с оценками трендовой составляющей, получаем оценку зависимости, «очищенную» от случайной составляющей, т.е. восстановленные значения (столбец (7) табл.3.1). Кажущиеся невязки, т.е. отклонения исходных значений закупочных цен от восстановленных значений, приведены в столбце (8) табл.3.1. Сравнивая столбцы (6) и (8), убеждаемся в целесообразности введения в модель периодической составляющей. В 9 случаях из 12 абсолютные величины отклонений уменьшились, в остальных трех, хотя и возросли, но лишь до среднего уровня среди остальных.

Таблица 3.2

Оценивание периодической составляющей

Номер квартала s	Месяц	Отклонения от тренда			Оценка $g_s^* = f^*(t_s)$ периодической составляющей
		В 2003 г.	В 2004 г.	В 2005 г.	
1	Январь	-50	- 888	-191	- 376
2	Апрель	788	741	69	533
3	Июль	- 324	- 533	- 851	- 569
4	Октябрь	- 337	982	588	411

Возведя в квадрат оценки периодической составляющей (табл.3.2), сложив эти квадраты, умножив на число лет и поделив на n, получаем, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f^*(t_k)\right)^2 = 229\ 537.$$

Оценкой дисперсии случайной составляющей является

$$(\sigma^*)^2 = \frac{SS}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f^*(t_k)\right)^2 = 378\ 267{,}83 - 229\ 537 = 148\ 731,$$

а оценкой среднего квадратического отклонения

$$\sigma^* = \sqrt{148731} = 385{,}7\ .$$

Оценим дисперсии оценок параметров

$$D^*(a^*) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D^*(E_k) = \frac{(\sigma^*)^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} = \frac{143731}{143} = 1040,$$

$$D^*(b^*) = \frac{(\sigma^*)^2}{n} = \frac{143731}{12} = 12394.$$

Средние квадратические отклонения a^* и b^* оцениваются как 32,25 и 111,33 соответственно, а доверительные интервалы, соответствующие доверительной вероятности 0,95, таковы:

$[a_{\min};a_{\max}] = [149{,}05;275{,}47]$, $[b_{\min};b_{\max}] = [3748{,}96;4185{,}38]$.

Первое из условий (3.8) выполнено в силу построения оценок периодической составляющей по целому числу периодов. Действительно, согласно данным табл.3.2 сумма оценок периодической составляющей для 12 точек наблюдений равна (-3), незначительное отклонение от 0 вызвано ошибками округления.

Смещение оценки a^* оценивается как

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f^*(t_k) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t}) f^*(t_k)}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} = \frac{5568}{143} = 38{,}94.$$

Таким образом, смещение имеет тот же порядок, что и среднее квадратичное отклонение оценки a^*, и заведомо меньше, чем полуширина доверительного интервала. Таким образом, можно считать, что предположения (3.8) выполнены для данных табл.3.1.

Перейдем к оценке дисперсий значений периодической составляющей:

$$D(g_s^*) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} h_{ks}^2,\ \ s = 1,2,\ldots,q,$$

где $h_{ks} = -c_k r_s - \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j-1)q,\ j = 1,2,\ldots,m\}$, и $h_{ks} = -c_k r_s - \frac{1}{n}$ при иных значениях индекса суммирования k, и $r_s = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(t_{s+(j-1)q} - \bar{t})$.

Начнем со значения $s = 1$ (периодическая составляющая для января). Тогда $r_1 = \frac{1}{3}\big((1-6{,}5) + (5-6{,}5) + (9-6{,}5)\big) = -1{,}5$. Понадобятся значения

$$c_k = \frac{t_k - \bar{t}}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} = \frac{t_k - 6{,}5}{143} = \frac{k - 6{,}5}{143}.$$

Расчет удобно проводить с помощью таблицы (табл.3.3).

Таблица 3.3

Расчет дисперсии периодической составляющей

k	$t_k - \bar{t}$	$c_k r_1$	$-1/n$	$+1/m$	h_{k1}	h_{k1}^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	- 5,5	0,0577	- 0,0833	0,3333	0,3077	0,09468
2	- 4,5	0,0472	- 0,0833	-	- 0,0361	0,00130
3	- 3,5	0,0367	- 0,0833	-	- 0,0466	0,00217
4	- 2,5	0,0262	- 0,0833	-	- 0,0571	0,00326
5	- 1,5	0,0157	- 0,0833	0,3333	0,2657	0,07060
6	- 0,5	0,0052	- 0,0833	-	- 0,0781	0,00610
7	0,5	- 0,0052	- 0,0833	-	- 0,0885	0,00783
8	1,5	- 0,0157	- 0,0833	-	- 0,0990	0,00980
9	2,5	- 0,0262	- 0,0833	0,3333	0,2238	0,05009
10	3,5	- 0,0367	-0,0833	-	0,1200	0,01440
11	4,5	- 0,0472	-0,0833	-	0,1305	0,01703
12	5,5	- 0,0577	-0,0833	-	0,1410	0,01988

В таблице 3.3 столбец (3) получен из столбца (2) умножением на $\frac{r_1}{143} = \frac{-1{,}5}{143} = -0{,}01049$, каждый элемент столбца (6) равен сумма элементов столбцов (3), (4) и (5), стоящих в той же строке, а в столбце (7) стоят квадраты соседних элементов из столбца (6). Цель построения табл.3.3 – расчет суммы элементов столбца (7). Эта сумма равна 0,28275. Следовательно,

$$\sqrt{D^*(g_1^*)} = \sigma^* \sqrt{\sum_{k=1}^{n} h_{k1}^2} = 385{,}7 \times \sqrt{0{,}28275} = 204{,}8.$$

Доверительный интервал для значения периодической составляющей в январе (- 376 – 1,96×204,8; -376 + 1,96×204,8) захватывает 0 (при доверительной вероятности 0,95), отличие значения периодической составляющей от 0 не значимо (на уровне значимости 0,05).

Аналогичный случай для значения s = 2 (периодическая составляющая для апреля) дает

$$\sum_{k=1}^{n} h_{k2}^2 = 0{,}25524,\ \sqrt{D^*(g_2^*)} = \sigma^* \sqrt{\sum_{k=1}^{n} h_{k2}^2} = 385{,}7 \times \sqrt{0{,}25524} = 194{,}86.$$

Доверительный интервал для значения периодической составляющей в апреле (533 – 1,96×194,86; 533 + 1,96×194,86) = (533 – 381,93; 533 + 381,93) не захватывает 0 (при доверительной вероятности 0,95), отличие значения периодической составляющей от 0 значимо (на уровне значимости 0,05).

Приступим к построению интервального прогноза. Необходимо рассчитать величины $w_{ks} = c_k(t - \bar{t} - r_s) + \frac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j-1)q,\ j = 1,2,...,m\}$, и $w_{ks} = c_k(t - \bar{t} - r_s)$ при всех остальных значениях индекса суммирования k, где r_s – то же, что и ранее, поскольку точечный прогноз $x^*(t)$ является несмещенным, асимптотически нормальным, а оценка его дисперсии:

$$D^*(x^*(t)) = (\sigma^*)^2 \sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2.$$

Начнем с прогноза на январь 2006 г. (по данным за 2003 - 2005 гг.). Тогда t = 13, s = 1, $r_1 = -1{,}5$, $w_{k1} = 8c_k + \frac{1}{3}$, если $k \in \{1 + 4(j-1),\ j = 1,2,3\}$, и $w_{k1} = 8c_k$ при всех остальных значениях индекса суммирования. При этом

$$8c_k = 8\frac{k - 6{,}5}{143} = \frac{8k - 52}{143}.$$

Расчет удобно проводить с помощью таблицы (табл.3.4).

Сумма значений, стоящих в последнем столбце табл.3.4, равна 0,61299. Согласно формуле (3.20)

$$\Delta(13) = U(0{,}95)\sqrt{D^*(x^*(13))} = 1{,}96 \times 385{,}7 \times \sqrt{0{,}61299} = 591{,}88.$$

Согласно (3.15) точечный прогноз таков:

$$x^*(13) = a^*(13 - \bar{t}) + d^* + f^*(13) = 212{,}26 \times 13 + 2587{,}48 + (-376) = 4971.$$

Нижняя и верхняя доверительные границы для прогностической функции (с учетом как трендовой, так и периодической составляющих) имеют вид: $x_{нижн}(13) = 4971 - 592 = 4379,\ \ x_{верх}(13) = 4971 + 592 = 5563$.

Реальное значение [108] - 4336. Оно практически совпадает с прогнозным значением $x_{нижн}(13)$ (здесь не учитываем то, что для прогноза индивидуальных значений от доверительных границ для прогностической функции необходимо сместиться вверх и вниз на основе расчета выборочных квантилей для кажущихся невязок). Прогноз оправдался.

Таблица 3.4

Расчет дисперсии прогностической функции

k	$\frac{8k-52}{143}$	$1/m$	w_{k1}	w_{k1}^2
1	- 0,3077	0,3333	0,0256	0,00066
2	- 0,2517	-	- 0,2517	0,06336
3	- 0,1958	-	- 0,1958	0,03834
4	- 0,1399	-	- 0,1399	0,01957
5	- 0,0839	0,3333	0,2494	0,06220
6	- 0,0280	-	- 0,0280	0,00078
7	0,0280	-	0,0280	0,00078
8	0,0839	-	0,0839	0,00700
9	0,1399	0,3333	0,4732	0,22392
10	0,1958	-	0,1958	0,03834
11	0,2517	-	0,2517	0,06336
12	0,3077	-	0,3077	0,09468

Аналогичные расчеты для апреля 2006 г. (t = 14, s = 2, $r_2 = -0{,}5$) дают $\Delta(14) = 1{,}96 \times 385{,}7 \times \sqrt{0{,}72480} = 643{,}60$.

Точечный прогноз равен $x^*(14)$ = 6092, а нижняя и верхняя доверительные границы таковы: $x_{нижн}(14) = 5448,\ \ x_{верх}(14) = 6736$. Реальное значение – 5430. Оно практически совпадает с прогнозным значением $x_{нижн}(14)$. Как и в предыдущем случае, прогноз оправдался.

Непараметрическое оценивание точки встречи (точки пересечения регрессионных прямых). В непараметрической вероятностно-статистической модели (т.е. без предположения о нормальности распределения погрешностей) нами получено асимптотическое распределение точки пересечения двух регрессионных линейных зависимостей. На основе метода линеаризации выписаны асимптотические дисперсия и доверительный интервал для точки встречи [148].

Пусть зависимость от времени t некоторого показателя $x_1(t)$ технического уровня или качества продукции предприятия «Альфа» описывается линейной функцией

$x_1(t) = a_1 t + d_1$.

Пусть аналогичный показатель у его конкурента (ОАО «Бета») также описывается линейной функцией, но с другими коэффициентами:

$x_2(t) = a_2 t + d_2$.

Предположим, что предприятие «Альфа» находится в положении догоняющей стороны. Это значит, что в рассматриваемый момент времени t_0 (например, «сегодня») значение показателя у его продукции ниже: $x_1(t_0) < x_2(t_0)$, но темп роста у предприятия «Альфа» выше, чем у конкурента: $a_1 > a_2$.

Возникает естественный вопрос – когда предприятие «Альфа» догонит конкурента? Другими словами, в какой момент времени будет выполнено равенство $x_1(t) = x_2(t)$? Решая относительно t уравнение

$a_1 t + d_1 = a_2 t + d_2$,

получаем, что встреча произойдет в момент

$$t_B = \frac{d_2 - d_1}{a_1 - a_2}.$$

Представляют интерес еще две величины. Во-первых, уровень качества, при котором предприятие «Альфа» сравняется с конкурентом, т.е. общий уровень качества в момент встречи:

$$x = x_1(t_B) = x_2(t_B) = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 - a_2}.$$

Во вторых, временной лаг, т.е. величина отставания предприятия «Альфа» в рассматриваемый момент времени t_0. В какой (более ранний) момент времени t_k конкурент имел тот уровень качества, которого предприятие «Альфа» достигло сейчас? Для ответа на этот вопрос надо решить уравнение $x_2(t) = x_1(t_0)$. Решением является

$$t_k = \frac{x_1(t_0) - d_2}{a_2}.$$

Следовательно, предприятие «Альфа» отстает на

$$L = t_0 - t_k = \frac{(a_2 - a_1)t_0 + d_2 - d_1}{a_2} = \frac{x_2(t_0) - x_1(t_0)}{a_2}$$

единиц времени (лет).

В реальных ситуациях линейные зависимости неизвестны. Однако известны исходные данные $(t_{i1}; x_{i1}), i = 1,2,...,n(1)$, для предприятие «Альфа» и $(t_{j2}; x_{j2})$, j=1,2,…,n(2), для предприятия-конкурента. При этом значения показателя $x_1(t_{i1}) = x_{i1}$ у предприятие «Альфа» в моменты времени t_{i1} представляются в виде

$x_1(t_{i1}) = x_{i1} = a_1 t_{i1} + d_1 + e_{i1}$, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$,

где коэффициенты a_1 и d_1 неизвестны статистику, а e_{i1} – погрешности измерения (невязки). Будем считать, что e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, - совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D(e_{i1}) = \sigma_1^2$, неизвестной исследователю.

Для предприятия-конкурента справедливо аналогичное представление

$x_2(t_{j2}) = x_{j2} = a_2 t_{j2} + d_2 + e_{j2}$, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$,

где коэффициенты a_2 и d_2 неизвестны статистику, а e_{j2} – погрешности измерения (невязки). Примем, что e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, - совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D(e_{j2}) = \sigma_2^2$, неизвестной исследователю.

Примем, что две совокупности случайных величин e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, и e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, независимы между собой. В каждой совокупности случайные величины одинаково распределены, но функции распределения, соответствующие разным совокупностям (т.е. предприятию «Альфа» и предприятию-конкуренту), могут различаться между собой.

Подчеркнем, что в рассматриваемой вероятностно-статистической модели не предполагается, что эти функции распределения входят в какое-либо параметрическое семейство распределений (в частности, не предполагаем, что невязки имеют нормальное распределение). Это и значит, что рассматривается непараметрическая постановка. Однако считаем, что объемы данных $n(1)$ и $n(2)$ достаточно велики, так что можно применять центральную предельную теорему и приближать совместное распределение оценок метода наименьших квадратов с помощью многомерного нормального распределения.

Итак, решение задачи о точке встречи получим в рамках непараметрической вероятностно-статистической модели. Весьма частный случай, когда невязки e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, и e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, имеют нормальное распределение, рассмотрен в [382].

Рассмотрим метод решения задачи о встрече. Вместо неизвестных статистику зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будем использовать их оценки $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$, полученные методом наименьших квадратов. Для этого необходимо оценить коэффициенты по правилам, полученным в [210, п.9.2] , а затем рассчитать оценки момента встречи t_B^*, уровня качества в момент встречи $x^* = x_1^*(t_B^*) = x_2^*(t_B^*)$ и временного лага (величины отставания)

$$L^* = \frac{x_2^*(t_0) - x_1^*(t_0)}{a_2^*},$$

используя оценки коэффициентов зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$ вместо неизвестных истинных коэффициентов.

Полезным является, как и в [210], использование центрирования средними значениями независимой переменной при параметризации зависимостей:

$x_1(t) = a_1(t - t_{ср}(1)) + b_1 = a_1 t + d_1$,

$x_2(t) = a_2(t - t_{ср}(2)) + b_2 = a_2 t + d_2$,

где

$$t_{cp}(1) = \frac{t_{11} + t_{21} + ... + t_{n(1)1}}{n(1)}, \qquad t_{cp}(2) = \frac{t_{12} + t_{22} + ... + t_{n(2)2}}{n(2)} \qquad (3.21)$$

Таким образом,

$$d_k = b_k - a_k t_{cp}(k), k = 1{,}2 .$$

Дело в том, что асимптотическое описание совместного распределения коэффициентов проще в случае центрированной зависимости, в частности, оценки коэффициентов $a_k^*, b_k^*, k = 1{,}2,$ асимптотически независимы.

Оценки метода наименьших квадратов имеют вид

$$a_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n(k)} x_{ik}(t_{ik} - t_{cp}(k))}{\sum_{i=1}^{n(k)} (t_{ik} - t_{cp}(k))^2},$$

(3.22)

$$b_k^* = x_{cp}(k) = \frac{x_{1k} + x_{2k} + ... + x_{n(k)k}}{n(k)}, k = 1{,}2$$

(3.23)

Точечные оценки момента встречи t_B^*, уровня качества в момент встречи x^* и временного лага L^* выражаются через оценки коэффициентов линейных зависимостей так:

$$t_в^* = \frac{d_2^* - d_1^*}{a_1^* - a_2^*} = \frac{b_2^* - b_1^* + a_1^* t_{cp}(1) - a_2^* t_{cp}(2)}{a_1^* - a_2^*}, \qquad (3.24)$$

$$x^* = \frac{a_1^* d_2^* - a_2^* d_1^*}{a_1^* - a_2^*} = \frac{a_1^* b_2^* - a_2^* b_1^* + a_1^* a_2^* (t_{cp}(1) - t_{cp}(2))}{a_1^* - a_2^*}, \qquad (3.25)$$

$$L^* = \frac{(a_2^* - a_1^*)t_0 + d_2^* - d_1^*}{a_2^*} = \frac{(a_2^* - a_1^*)t_0 + b_2^* - b_1^* + a_1^* t_{cp}(1) - a_2^* t_{cp}(2)}{a_2^*}. \qquad (3.26)$$

Из приведенных формул вытекает, что

$t_B^* = f_1(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$, $x^* = f_2(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$, $L^* = f_1(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$,

где

$$f_1(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_3 + z_1 t_{cp}(1) - z_2 t_{cp}(2)}{z_1 - z_2},$$

$$f_2(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 z_4 - z_2 z_3 + z_1 z_2 (t_{cp}(1) - t_{cp}(2))}{z_1 - z_2},$$

$$f_3(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_1)t_0 + z_4 - z_3 + z_1 t_{cp}(1) - z_2 t_{cp}(2)}{z_2}.$$

Поскольку все входящие в полученные формулы моменты времени предполагаются заданными (детерминированными), то интересующие нас оценки задаются гладкими функциями от четырехмерного вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ оценок метода наименьших квадратов коэффициентов в линейных зависимостях.

Рассмотрим асимптотическое распределение вектора оценок МНК в рамках описанной выше непараметрической вероятностно-статистической модели [210]. Оценки $a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*$ являются несмещенными, их дисперсии таковы:

$$D(a_k^*) = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{i=1}^{n(k)} (t_{ik} - t_{cp}(k))^2}, \quad D(b_k^*) = \frac{\sigma_k^2}{n(k)}, \quad k = 1,2.$$

Отметим, что в соответствии с принятыми предположениями все четыре дисперсии стремятся к 0 при безграничном росте $n(1)$ и $n(2)$.

Все ковариации вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ равны 0. Для пар координат с различающимися нижними индексами это вытекает из предположения о независимости между собой совокупностей невязок, соответствующим измерениям значений двух разных линейных функций. Для пар координат с одинаковыми нижними индексами, т.е. для пар (a_1^*, b_1^*) и (a_2^*, b_2^*), это установлено в [210]. Таким образом, в ковариационной матрице вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ отличны от 0 только элементы, стоящие на главной диагонали, т.е. дисперсии.

Каждый из векторов (a_1^*, b_1^*) и (a_2^*, b_2^*) является суммой $n(1)$ и $n(2)$ слагаемых соответственно. Если каждое из слагаемых мало по сравнению со всей суммой, т.е. если

$$\lim_{n(k)\to\infty} \max_{1\le i\le n(k)} \frac{|t_{ik} - t_{cp}(k)|}{\left\{\sum_{i=1}^{n}(t_{ik} - t_{cp}(k))^2\right\}^{1/2}} = 0, \quad k = 1,2,$$

то при больших $n(1)$ и $n(2)$ распределение вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ приближается нормально распределенным случайным вектором с независимыми координатами. Математические ожидания и дисперсии координат приближающего вектора совпадают с одноименными характеристиками вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$. Другими словами, вектор $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ является асимптотически нормальным с указанными выше параметрами.

Рассмотрим распределение функции от вектора оценок МНК. Если функция $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ достаточно гладкая, то согласно методу линеаризации [210, п.4.4]

$$f(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*) - f(a_1, a_2, b_1, b_2) = \frac{\partial f}{\partial z_1}\left(a_1^* - a_1\right) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z_2}\left(a_2^* - a_2\right) + \frac{\partial f}{\partial z_3}\left(b_1^* - b_1\right) + \frac{\partial f}{\partial z_4}\left(b_2^* - b_2\right)$$

с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка.

Как показано выше, правая часть последней формулы приближается суммой четырех независимых нормально распределенных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Следовательно, функция $f(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ от вектора оценок МНК является асимптотически нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $f(a_1, a_2, b_1, b_2)$, совпадающим с теоретическим значением, и дисперсией

$$Df(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 D\left(a_1^*\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 D\left(a_2^*\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)^2 D\left(b_1^*\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_4}\right)^2 D\left(b_2^*\right)$$

Подставив приведенные выше значения дисперсий, получаем, что

$$Df(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sum\limits_{i=1}^{n(1)} (t_{i1} - t_{cp}(1))^2} +$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sum\limits_{i=1}^{n(2)} (t_{i2} - t_{cp}(2))^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{n(1)} + \left(\frac{\partial f}{\partial z_4}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{n(2)}$$

Рассмотрим асимптотическое распределение момента встречи. Начнем с функции $t_B^* = f_1(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$. Имеем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \frac{z_3 - z_4 + z_2(t_{cp}(1) - t_{cp}(2))}{(z_1 - z_2)^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = \frac{z_4 - z_3 + z_1(t_{cp}(1) - t_{cp}(2))}{(z_1 - z_2)^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_3} = -\frac{1}{z_1 - z_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_4} = \frac{1}{z_1 - z_2}.$$

В приведенных выше формулах частные производные можно брать как в точке (a_1, a_2, b_1, b_2), так и в точке $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$. Различие – бесконечно малые величины более высокого порядка. Поскольку истинные значения коэффициентов линейных зависимостей неизвестны, частные производные будем брать в точке $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$.

Из последних формул с помощью несложных преобразований получаем, что

$$D(t_B^*) = \left(\frac{b_1^* - b_2^* + a_2^*(t_{cp}(2) - t_{cp}(1))}{(a_1^* - a_2^*)^2}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sum\limits_{i=1}^{n(1)} (t_{i1} - t_{cp}(1))^2} +$$
$$+\left(\frac{b_2^* - b_1^* + a_1^*(t_{cp}(2) - t_{cp}(1))}{(a_1^* - a_2^*)^2}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sum\limits_{i=1}^{n(1)} (t_{i2} - t_{cp}(2))^2} + \frac{1}{(a_1^* - a_2^*)^2}\left(\frac{\sigma_1^2}{n(1)} + \frac{\sigma_2^2}{n(2)}\right). \quad (3.27)$$

Для практического применения полученных результатов остается заменить неизвестные дисперсии невязок σ_1^2 и σ_2^2 на их состоятельные оценки. При больших объемах данных $n(1)$ и $n(2)$ используют оценки дисперсий невязок

$$(\sigma_1^2)^* = \frac{SS(1)}{n(1)}, \quad (\sigma_2^2)^* = \frac{SS(2)}{n(2)},$$

где $SS(1)$ и $SS(2)$ – соответствующие остаточные суммы квадратов,

$$SS(k) = \sum_{i=1}^{n(k)} (x_{ik} - x_k^*(t_{ik}))^2, \ k = 1,2. \qquad (3.28)$$

. Иногда рекомендуют применение несмещенных оценок дисперсий невязок

$$(\sigma_1^2)^{**} = \frac{SS(1)}{n(1)-2}, \quad (\sigma_2^2)^{**} = \frac{SS(2)}{n(2)-2}. \qquad (3.29)$$

Ясно, что с ростом объемов данных $n(1)$ и $n(2)$ различие между двумя последними формулами исчезает.

На основе полученных результатов легко указать методы доверительного оценивания и проверки гипотез для момента встречи t_B. Так, асимптотический доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности p, имеет вид

$$\left[t_B^* - U(p)\{D^*(t_B^*)\}^{1/2};\ t_B^* + U(p)\{D^*(t_B^*)\}^{1/2}\right]. \qquad (3.30)$$

Здесь $D^*(t_B^*)$ - только что описанная оценка дисперсии случайной величины t_B (с использованием той или иной оценки дисперсий невязок), $U(p)$ - квантиль стандартного нормального распределения порядка $(1+p)/2$, т.е. $\Phi(U(p)) = \frac{1+p}{2}$, где $\Phi(w)$ - функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

В качестве примера рассмотрим показатели технического уровня продукции (в условных единицах) двух предприятий – ОАО «Альфа» и ОАО «Бета». Приведенные в табл.3.5 данные показывают, что в 1999 г. первое предприятие отстает от второго, но постепенно сокращает разрыв, более быстрыми темпами наращивая показатель технического уровня. Когда же оно догонит второе предприятие?

Таблица 3.5

Показатели технического уровня продукции двух предприятий

(в условных единицах, на конец года)

Показатели	Годы/условные моменты времени $t_{i1}=t_{j2}$						
	1999/1	2000/2	2001/3	2002/4	2003/5	2004/6	2005/7
ОАО «Альфа» $\boldsymbol{x_{i1}}$	0,1	0,2	0,6	0,5	0,8	0,9	1,3
Восстановленные значения (предприятие «Альфа») x_{i1}^*	0,0715	0,2572	0,4429	0,6286	0,8143	1,0000	1,1857
Показатели ОАО «Бета» $\boldsymbol{x_{j2}}$	0,6	0,95	0,8	1,2	1,1	1,2	1,4
Восстановленные значения (предприятие «Бета») x_{j2}^*	0,6928	0,8071	0,9214	1,0357	1,1500	1,2643	1,3786

Для проведения расчетов естественным образом введем условные моменты времени (табл.3.5). Методом наименьших квадратов восстановим линейные независимости. По формуле (3.21) получаем, что $t_{ср}(1) = t_{ср}(2) = 4$. По формулам (3.22) и (3.23) находим оценки коэффициентов линейных зависимостей

$$a_1^* = 0{,}1857,\ a_2^* = 0{,}1143,\ в_1^* = 0{,}6286,\ в_2^* = 1{,}0357.$$

Восстановленные зависимости имеют вид

$$x_1^*(t) = 0{,}1857(t-4) + 0{,}6286,\quad x_2^*(t) = 0{,}1143(t-4) + 1{,}0357.$$

Восстановленные значения приведены в табл.3.5.

Оценку момента встречи $t_в^*$ определим по формуле (3.24)

$$t_в^* = \frac{1{,}0357 - 0{,}6286 + 0{,}1857\cdot 4 - 0{,}1143\cdot 4}{0{,}1857 - 0{,}1143} = 9{,}7017.$$

Другими словами, значения показателей технического уровня предприятий сравняются в начале 2008 года. Это общее значение найдем по формуле (3.25):

$$x^* = \frac{0{,}1857\cdot 1{,}0357 - 0{,}1143\cdot 0{,}6286 + 0{,}1857\cdot 0{,}1143(4-4)}{0{,}1857 - 0{,}1143} = 1{,}6877$$

Для определения временного лага, т.е. величины, показывающей на сколько ОАО «Альфа» отстает от предприятия-конкурента, для определенности, в 2004 году, воспользуемся формулой (3.26)

$$L^* = \frac{(0{,}1143 - 0{,}1857)6 + 1{,}0357 - 0{,}6286 + 0{,}1857 \cdot 4 - 0{,}1143 \cdot 4}{0{,}1143} = 2{,}3123$$

Рассчитаем по формуле (3.30) асимптотический доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности p = 0,95. Для этого значения несмещенных оценок дисперсий невязок найдем по формуле (3.29), а значения остаточной суммы квадратов $SS(1)$ и $SS(2)$ определим по формуле (3.28). Получаем $\sigma_1^2 = 0{,}0137$, $\sigma_2^2 = 0{,}0156$. Асимптотическую дисперсию момента встречи найдем по формуле (3.27): $D^*(t_в^*) = 7{,}4883$. Поскольку $U(p)$ = 1,96 при p = 0,95, то доверительный интервал таков (рис.3.1):

$$\left[9{,}7017 - 1{,}96\sqrt{7{,}4883}; 9{,}7017 + 1{,}96\sqrt{7{,}4883}\right] = [4{,}3383; 15{,}0652]$$

Таким образом, возможно, что обгон уже состоялся (в 2004 или в 2005 году), но это не отражено в табл.3.5 из-за погрешностей, искажающих зависимости.

О практическом применении статистических оценок точки встречи. Необходимость получения приведенных выше результатов, касающихся оценок момента встречи t_B^*, уровня качества в момент встречи x^* и временного лага L^*, была выявлена в результате решения прикладных проблем, возникших при разработке системы автоматического проектирования (САПР) стандартов на продукцию во ВНИИСтандартизации Госстандарта [133]. В этой системе реализуются функции информационного обеспечения и анализа данных о характеристиках качества группы отечественных и зарубежных образцов (марок, моделей) аналогичной продукции, требований нормативно-технической документации на эту продукцию, а также поддерживаются функции интерактивного принятия решений по управлению качеством, сертификации и стандартизации.

Статистические методы в САПР стандартов используются для анализа распределений показателей качества продукции, исследования взаимосвязей показателей, выявления группировок продукции по уровню качества, анализа временных рядов и прогнозирования качества продукции. Основные проблемы программной реализации этих методов связаны с обеспечением решения задач пользователями (инженерами по стандартизации и техническому регулированию), не имеющими специальной подготовки по статистическим методам. Кроме того, возникли специфические задачи, требующие совершенствования известного статистического аппарата, в частности, задача сравнительного анализа тенденций развития отечественной и зарубежной групп продукции, решению которой и посвящены предыдущие страницы. Разработанное математическое и программное обеспечение применялось для анализа данных о характеристиках качества изделий электронной техники.

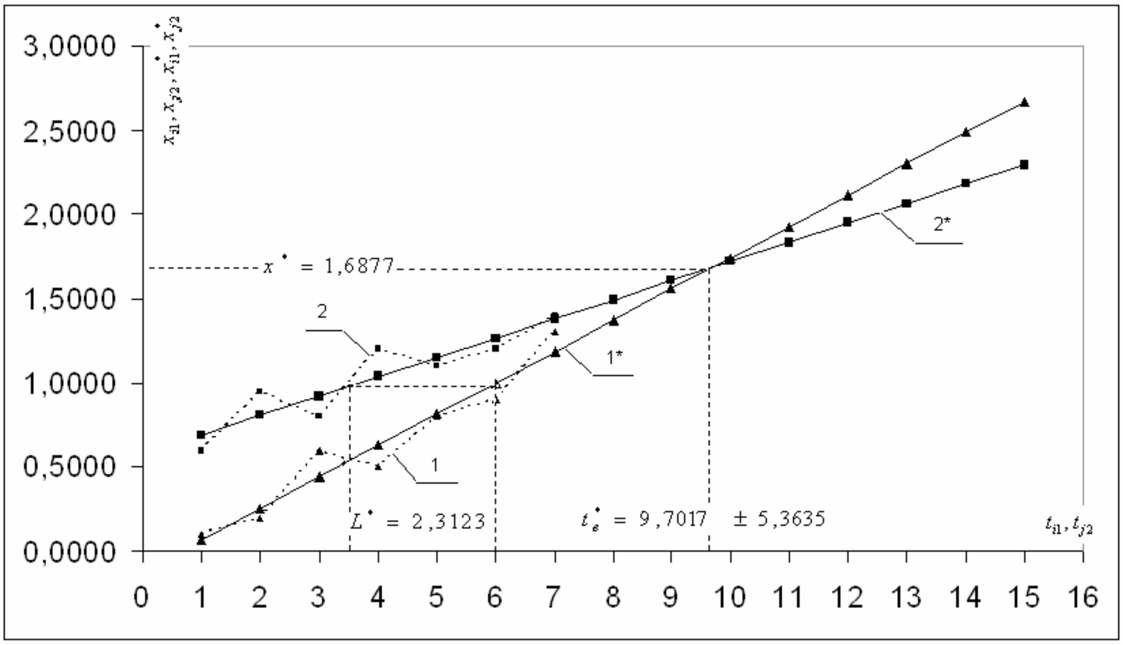


Рис.3.1. Динамика показателей технического уровня двух предприятий (1,2), восстановленные зависимости (1^*, 2^*) и доверительное оценивание момента встречи.

Разработанные в настоящем подразделе методы могут быть использованы при решении различных практических задач, связанных с интервальной оценкой точки пересечения двух регрессионных прямых. Дальнейшие результаты получены В.С. Муравьевой [146].

3.3. Непараметрические методы обнаружения эффекта

Система моделей проверки однородности (обнаружения эффекта) двух независимых выборок В прикладных исследованиях часто возникает необходимость выяснить, различаются ли генеральные совокупности, из которых взяты две независимые выборки. Например, надо выяснить, зависят ли от способа упаковки потребительские качества подшипников, измеренные через год после хранения. Или: влияет ли система оплаты на производительность труда.

В вероятностно-статистических терминах постановка задачи такова: имеются две выборки $x_1, x_2,...,x_m$ и $y_1, y_2,...,y_n$, требуется проверить их однородность. Выборка моделируется как совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин. Термин «однородность» уточняется ниже.

Противоположным понятием является «различие» (или «наличие эффекта»). Можно переформулировать задачу: требуется проверить, есть ли различие между выборками. Если различия нет, то для дальнейшего изучения две рассматриваемые выборки часто объединяют в одну.

Например, в маркетинге [273, 274, 275, 303] важно выделить сегменты потребительского рынка. Если установлена однородность двух выборок мнений потребителей, то возможно объединение сегментов, из которых эти выборки взяты, в один. В дальнейшем это позволит осуществлять по отношению к ним одинаковую маркетинговую политику (проводить одни и те же рекламные мероприятия и т.п.). Если же установлено различие, то поведение потребителей в двух сегментах различно, объединять эти сегменты нельзя, и могут понадобиться различные маркетинговые стратегии, своя для каждого из этих сегментов.

Вероятностная модель порождения данных. При проверке однородности двух выборок общепринята модель, в которой $x_1, x_2, ..., x_m$ рассматриваются как результаты m независимых наблюдений некоторой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, неизвестной статистику, а $y_1, y_2, ..., y_n$ - как результаты n независимых наблюдений, вообще говоря, другой случайной величины Y с функцией распределения $G(x)$, также неизвестной статистику. Предполагается также, что наблюдения в одной выборке не зависят от наблюдений в другой, поэтому выборки и называют независимыми.

Возможность применения модели в конкретной реальной ситуации требует обоснования. Независимость и одинаковая распределенность результатов наблюдений, входящих в выборку, могут быть установлены или исходя из методики проведения конкретных наблюдений, или путем проверки статистических гипотез независимости и одинаковой распределенности с помощью соответствующих критериев проверки статистических гипотез [18].

Если проведено $(m+n)$ измерений объемов продаж в $(m+n)$ торговых точках, то описанную выше модель, как правило, можно применять. Если же, например, x_i и y_i - объемы продаж одного и того же товара до и после определенного рекламного воздействия, то рассматриваемую модель применять нельзя, поскольку очевидно, что эти объемы продаж определяются не только и не столько рекламным воздействием, сколько особенностями конкретной торговой точки (ее расположением, продолжительностью работы, репутацией и т.д.). В последнем случае используют модель связанных выборок. В ней обычно строят новую выборку $z_i = x_i - y_i$ и используют статистические методы анализа одной выборки, а не двух. Методы проверки однородности для связанных выборок рассматриваются в последней части настоящего раздела.

Для количественных данных понятие «однородность», т. е. «отсутствие различия», может быть формализовано в терминах вероятностной модели различными способами [201].

Наивысшая степень однородности (абсолютная однородность) достигается, если обе выборки взяты из одной и той же генеральной совокупности, т. е. справедлива нулевая гипотеза

$H_0 : F(x)=G(x)$ *при всех x.*

Отсутствие абсолютной однородности означает, что верна альтернативная гипотеза, согласно которой

$H_1 : F(x_0)\neq G(x_0)$

хотя бы при одном значении аргумента x_0. Если гипотеза H_0 принята, то выборки можно объединить в одну, если нет - то нельзя.

В некоторых случаях целесообразно проверять не совпадение функций распределения, а лишь совпадение некоторых характеристик случайных величин X и Y - математических ожиданий, медиан, дисперсий, коэффициентов вариации и др. (однородность тех или иных характеристик). Например, однородность математических ожиданий означает, что справедлива гипотеза

$H'_0 : M(X)=M(Y),$

где $M(X)$ и $M(Y)$ - математические ожидания случайных величин X и Y, результаты наблюдений над которыми составляют первую и вторую выборки соответственно. Доказательство различия между выборками в рассматриваемом случае - это доказательство справедливости альтернативной гипотезы

$H'_1 : M(X) \neq M(Y).$

Если гипотеза H_0 верна, то и гипотеза H'_0 верна, но из справедливости H'_0 , вообще говоря, не следует справедливость H_0. Математические ожидания могут совпадать для различающихся между собой функций распределения. В частности, если в результате обработки выборочных данных принята гипотеза H'_0, то отсюда *не следует,* что две выборки можно объединить в одну. Однако в ряде ситуаций целесообразна проверка именно гипотезы H'_0. Например, пусть функция спроса на определенный товар или услугу оценивается путем опроса потребителей (первая выборка) или с помощью данных о продажах (вторая выборка). Тогда маркетологу важно проверить гипотезу об отсутствии систематических расхождений сводных результатов этих двух методов, т.е. гипотезу о равенстве математических ожиданий. Другой пример – из производственного менеджмента. Пусть изучается эффективность управления бригадами рабочих на предприятии с помощью двух организационных схем, результаты наблюдения - объем производства продукции или услуг на одного члена бригады (производительность), а показатель эффективности организационной схемы - средний (по предприятию) объем производства на одного рабочего. Тогда для сравнения эффективности организационных схем достаточно проверить гипотезу H'_0.

Иногда нужно проверить однородность дисперсий. Например, различаются ли два способа измерения по величине случайной ошибки – т.е. по дисперсии случайных погрешностей.

Традиционный метод проверки однородности (критерий Стьюдента). Вычисляют выборочные средние арифметические

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{1\le i\le m} x_i, \qquad y = \frac{1}{n}\sum_{1\le i\le n} y_i \ ,$$

затем выборочные дисперсии

$$s_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{1\le i\le m}(x_i - \bar{x})^2 \ , \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1\le i\le n}(y_i - \bar{y})^2$$

и статистику Стьюдента *t,* на основе которой принимают решение,

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}} \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \quad . \qquad (3.31)$$

По заданному уровню значимости α и числу степеней свободы (m+n – 2) из таблиц распределения Стьюдента (см., например, [18]) находят критическое значение $t_{кр}$. Если $|t|>t_{кр}$, то гипотезу однородности (отсутствия различия) отклоняют, если же $|t|\le t_{кр}$, то принимают.

Согласно математико-статистической теории должны быть выполнены два классических условия применимости критерия Стьюдента, основанного на использовании статистики t, заданной формулой (1):

а) результаты наблюдений имеют нормальные распределения:

$F(x)=N(x;\, m_1,\, \sigma_1^2),\ G(x)=N(x;\, m_2,\, \sigma_2^2)$

с математическими ожиданиями m_1 и m_2 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 в первой и во второй выборках соответственно;

б) дисперсии результатов наблюдений в первой и второй выборках совпадают:

$D(X)=\sigma_1^2=D(Y)=\sigma_2^2$.

Если условия а) и б) выполнены, то нормальные распределения $F(x)$ и $G(x)$ отличаются только математическими ожиданиями, а поэтому *обе* гипотезы H_0 и H'_0 сводятся к гипотезе

$H''_0 : m_1 = m_2,$

а *обе* альтернативные гипотезы H_1 и H'_1 сводятся к гипотезе

$H''_1 : m_1 \neq m_2$.

Если условия а) и б) выполнены, то статистика t при справедливости $H»_0$ имеет распределение Стьюдента с (m + n - 2) степенями свободы. Только в этом случае описанный выше традиционный метод обоснован безупречно. Если хотя бы одно из условий а) и б) не выполнено, то нет никаких оснований считать, что статистика t имеет распределение Стьюдента, поэтому применение традиционного метода не обосновано. Обсудим возможность проверки этих условий и последствия их нарушений.

Как подробно показано в разделе 3.1, априори нет оснований предполагать нормальность распределения результатов экономических, технико-экономических, технических, медицинских и иных наблюдений. Следовательно, нормальность надо проверять. Разработано много статистических критериев для проверки нормальности распределения результатов наблюдений [18]. Однако проверка нормальности - более сложная и трудоемкая статистическая процедура, чем проверка однородности (как с помощью статистики t Стьюдента, так и с использованием непараметрических критериев, рассматриваемых ниже).

Для достаточно надежного установления нормальности требуется весьма большое число наблюдений. Чтобы гарантировать, что функция распределения результатов наблюдений отличается от некоторой нормальной не более чем на 0,01 (при любом значении аргумента), требуется порядка 2500 наблюдений. В большинстве технических, экономических, медицинских и иных исследований число наблюдений существенно меньше.

Последствия нарушения условия нормальности. Если условие а) не выполнено, то распределение статистики t не является распределением Стьюдента. Однако можно показать, используя Центральную предельную теорему теории вероятностей и теоремы о наследовании сходимости [210, гл.4], что при справедливости H'_0 и условия б) распределение статистики t при росте объемов выборок приближается к стандартному нормальному распределению $\Phi(x) = N(x; 0, 1)$. К этому же распределению приближается распределение Стьюдента при возрастании числа степеней свободы. Другими словами, несмотря на нарушение условия нормальности традиционный метод (критерий Стьюдента) можно использовать (при определенных условиях!) для проверки гипотезы H'_0 при больших объемах выборок. При этом вместо таблиц распределения Стьюдента достаточно пользоваться таблицами стандартного нормального распределения $\Phi(x)$.

Сформулированное в предыдущем абзаце утверждение справедливо для любых функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ таких, что $M(X) = M(Y)$, $D(X) = D(Y)$ и выполнены некоторые внутриматематические условия, обычно считающиеся справедливыми в реальных задачах. Если же $M(X) \neq M(Y)$, то нетрудно вычислить, что при больших объемах выборок

$$P(t \le x) \approx \Phi(x - a_{mn}), \qquad (3.32)$$

где

$$a_{mn} = \frac{\sqrt{mn}[M(X) - M(Y)]}{\sqrt{mD(X) + nD(Y)}}. \qquad (3.33)$$

Формулы (3.32) - (3.33) позволяют приближенно вычислять мощность t-критерия (точность возрастает при увеличении объемов выборок m и n).

О проверке условия равенства дисперсий. Иногда условие б) вытекает из методики получения результатов наблюдений, например, когда с помощью одного и того же прибора или методики m раз измеряют характеристику первого объекта и n раз - второго, а параметры распределения погрешностей измерения при этом не меняются. Однако ясно, что в постановках большинства исследовательских и практических задач нет основании априори предполагать равенство дисперсий.

Целесообразно ли проверять равенство дисперсий статистическими методами, например, как это иногда предлагают, с помощью F-критерия Фишера? Этот критерий основан на нормальности распределений результатов наблюдений. А от нормальности неизбежны отклонения (см. выше). Причем хорошо известно, что в отличие от t-критерия распределение F-критерия Фишера сильно меняется при малых отклонениях от нормальности [21]. Кроме того, F-критерий отвергает гипотезу $D(X) = D(Y)$ лишь при большом различии выборочных дисперсий. Так, для данных [18] о двух группах результатов химических анализов отношение выборочных дисперсий равно 1,95, т.е. существенно отличается от 1. Тем не менее, гипотеза о равенстве теоретических дисперсий принимается при применении F-критерия на 1%-м уровне значимости. Следовательно, при проверке однородности применение F-критерия для предварительной проверки равенства дисперсий с целью обоснования возможности использования критерия Стьюдента нецелесообразно.

Итак, в большинстве прикладных задач условие б) нельзя считать выполненным, а проверять его перед проверкой однородности нецелесообразно.

Последствия нарушения условия равенства дисперсий. Если объемы выборок m и n велики, то можно показать, что распределение статистики t описывается с помощью только математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$, дисперсий $D(X)$, $D(Y)$ и отношения объемов выборок, а именно:

$$P(t \leq x) \approx \Phi(b_{mn}x - a_{mn}), \qquad (3.34)$$

где a_{mn} определено формулой (3.33),

$$b_{mn}^{2} = \frac{\lambda D(X) + D(Y)}{D(X) + \lambda D(Y)}, \quad \lambda = \frac{m}{n}. \qquad (3.35)$$

Если $b_{mn} \neq 1$, то распределение статистики t отличается от распределения, заданного формулой (3.32), полученной в предположении равенства дисперсий. Когда $b_{mn}=1$? В двух случаях - при $m = n$ и при $D(X) = D(Y)$. Таким образом, при больших и равных объемах выборок требовать выполнения условия б) нет необходимости. Кроме того, ясно, что если объемы выборок мало различаются, то b_{mn} близко к 1. Так, для данных [18] о двух группах результатов химических анализов имеем $b^*_{mn}= 0{,}987$, где b^*_{mn} - оценка b_{mn}, полученная заменой в формуле (5) теоретических дисперсий на их выборочные оценки.

Подведем итоги рассмотрения t-критерия. Он позволяет проверять гипотезу H'_0 о равенстве математических ожиданий, но не гипотезу H_0 о том, что обе выборки взяты из одной и той же генеральной совокупности. Классические условия применимости критерия Стьюдента в подавляющем большинстве технических, экономических, медицинских и иных задач не выполнены. Тем не менее, при больших и примерно равных объемах выборок его можно применять. При конечных объемах выборок традиционный метод носит неустранимо приближенный характер.

Критерий Крамера-Уэлча равенства математических ожиданий. Вместо критерия Стьюдента целесообразно для проверки H'_0 использовать критерий Крамера-Уэлча [105, с.492], основанный на статистике

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{m} + \frac{s_y^2}{n}}} = \frac{\sqrt{mn}\left(\bar{x} - \bar{y}\right)}{\sqrt{ns_x^2 + ms_y^2}}. \qquad (3.36)$$

Критерий Крамера-Уэлча имеет прозрачный смысл – разность выборочных средних арифметических для двух выборок делится на естественную оценку среднего квадратического отклонения этой разности. Естественность указанной оценки состоит в том, что неизвестные статистику дисперсии заменены их выборочными оценками. Из многомерной центральной предельной теоремы и из теорем о наследовании сходимости [210, гл.4] вытекает, что при росте объемов выборок распределение статистики T Крамера-Уэлча сходится к стандартному нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Итак, при справедливости H'_0 и больших объемах выборок распределение статистики T приближается с помощью стандартного нормального распределения $\Phi(x)$, из таблиц которого и следует брать критические значения.

При $m = n$, как следует из формул (3.31) и (3.36), $t = T$. При $m \neq n$ этого равенства нет. В частности, при s_x^2 в формуле (3.31) стоит множитель (m - 1), а в формуле (3.36)- множитель n.

Если $M(X) \neq M(Y)$, то при больших объемах выборок

$$P(T \leq X) \approx \Phi(x - c_{mn}), \qquad (3.37)$$

где

$$c_{mn} = \frac{\sqrt{mn}[M(X) - M(Y)]}{\sqrt{nD(X) + mD(Y)}}. \qquad (3.38)$$

При $m = n$ или $D(X) = D(Y)$, согласно формулам (3.33) и (3.38), $a_{mn} = c_{mn}$, в остальных случаях равенства нет.

Из асимптотической нормальности статистики T, формул (3.37) и (3.38) следует, что правило принятия решения для критерия Крамера-Уэлча выглядит так:

- если $|T| \le \Phi^{-1}\left(1-\alpha/2\right)$, то гипотеза однородности (равенства) математических ожиданий принимается на уровне значимости α,
- если же $|T| > \Phi^{-1}\left(1-\alpha/2\right)$, то гипотеза однородности (равенства) математических ожиданий отклоняется на уровне значимости α.

В прикладной статистике наиболее часто применяется уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Тогда значение модуля статистики T Крамера-Уэлча надо сравнивать с граничным значением $\Phi^{-1}\left(1-\alpha/2\right) = 1{,}96$.

Из сказанного выше следует, что применение критерия Крамера-Уэлча при анализе организационно-экономических данных более обосновано, чем применение критерия Стьюдента. Дополнительное преимущество критерия Крамера-Уэлча по сравнению с критерием Стьюдента - не требуется равенства дисперсий $D(X) = D(Y)$. Распределение статистики T не является распределением Стьюдента, однако и распределение статистики t, как показано выше, не является таковым в реальных ситуациях.

Распределение статистики T при объемах выборок $m = n = 6, 8, 10, 12$ и различных функциях распределений выборок $F(x)$ и $G(x)$ изучено нами совместно с Ю.Э. Камнем и Я.Э. Камнем методом статистических испытаний [81]. Рассмотрены различные варианты функций распределения $F(x)$ и $G(x)$. Результаты [81] показывают, что даже при таких небольших объемах выборок точность аппроксимации предельным стандартным нормальным распределением вполне удовлетворительна. Поэтому представляется целесообразным во всех тех случаях, когда в соответствии с устаревшими литературными источниками рекомендован критерий Стьюдента, заменить его на критерий Крамера-Уэлча.

Непараметрические методы проверки однородности. В большинстве прикладных задач представляет интерес не проверка равенства математических ожиданий или иных характеристик распределения, а обнаружение различия генеральных совокупностей, из которых извлечены выборки, т.е. проверка гипотезы H_0. Методы проверки гипотезы H_0 позволяют обнаружить не только изменение математического ожидания, но и любые иные изменения функции распределения результатов наблюдений при переходе от одной выборки к другой (увеличение разброса, появление асимметрии и т. д.). Как установлено выше, методы, основанные на использовании статистик t Стьюдента и T Крамера-Уэлча, не позволяют проверять гипотезу H_0. Априорное предположение о принадлежности функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ к какому-либо определенному параметрическому семейству (например, семействам нормальных, логарифмически нормальных, распределений Вейбулла-Гнеденко, гамма-распределений и др.), как также показано выше, обычно нельзя достаточно надежно обосновать. Поэтому для проверки H_0 следует использовать методы, пригодные при любом виде $F(x)$ и $G(x)$, т.е. непараметрические методы. (Термин «непараметрический метод» означает, что при использовании этого метода нет необходимости предполагать, что функции распределения результатов наблюдений принадлежат какому-либо определенному параметрическому семейству.)

Для проверки гипотезы H_0 разработано много непараметрических методов - критерии Смирнова, типа омега-квадрат (Лемана - Розенблатта), Вилкоксона (Манна-Уитни), Ван-дер-Вардена, Сэвиджа, хи-квадрат и др. [42, 210, 329]. Распределения статистик всех этих критериев при справедливости H_0 не зависят от конкретного вида совпадающих функций распределения $F(x) \equiv G(x)$. Следовательно, таблицами точных и предельных (при больших объемах выборок) распределений статистик этих критериев и их процентных точек [18, 329] можно пользоваться при любых непрерывных функциях распределения результатов наблюдений.

Каким из непараметрических критериев пользоваться? Как известно [21], для выбора одного из нескольких критериев необходимо сравнить их мощности, определяемые видом альтернативных гипотез. Сравнению мощностей критериев посвящена обширная литература.

Хорошо изучены свойства критериев при альтернативной гипотезе сдвига

$H_{1c} : G(x) = F(x\text{-}d),\ d \neq 0.$

Критерии Вилкоксона, Ван-дер-Вардена и ряд других ориентированы для применения именно в этой ситуации. Если m раз измеряют характеристику одного объекта и n раз - другого, а функция распределения погрешностей измерения произвольна, но не меняется при переходе от объекта к объекту (это более жесткое требование, чем условие равенства дисперсий), то рассмотрение гипотезы H_{1c} оправдано. Однако в большинстве прикладных исследований нет оснований считать, что функции распределения, соответствующие выборкам, различаются только сдвигом.

Двухвыборочный критерий Вилкоксона. Рассмотрим подробнее часто используемый непараметрический критерий Вилкоксона (Манна-Уитни). Покажем, что он предназначен для проверки гипотезы

H_0: $P(X < Y) = 1/2$,

где X - случайная величина, распределенная как элементы первой выборки, а Y - случайная величина, распределенная как элементы второй выборки. Это – непараметрическая гипотеза, согласно которой медиана X - Y равна 0. Но из нее не следует, что функции распределения двух выборок совпадают. Обратное верно: если X и Y одинаково распределены, то $P(X < Y) = ½$.

Обычно предполагается, что функции $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны и строго возрастают. Из непрерывности этих функций следует, что с вероятностью 1 все $m + n$ результатов наблюдений различны. При рассмотрении реальных статистических данных иногда наблюдаются совпадения результатов наблюдений, но сам факт их наличия - свидетельство нарушений предпосылок только что описанной базовой математической модели.

Статистика S двухвыборочного критерия Вилкоксона определяется следующим образом. Все элементы объединенной выборки $X_1, X_2, ..., X_m, Y_1, Y_2, ..., Y_n$ упорядочиваются в порядке возрастания. Элементы первой выборки $X_1, X_2, ..., X_m$ занимают в общем вариационном ряду места с номерами $R_1, R_2, ..., R_m$, другими словами, имеют ранги $R_1, R_2, ..., R_m$. Тогда статистика Вилкоксона - это сумма рангов элементов первой выборки

$S = R_1 + R_2 + ...+ R_m$.

Статистика U Манна-Уитни определяется как число пар (X_i, Y_j) таких, что $X_i < Y_j$, среди всех mn пар, в которых первый элемент - из первой выборки, а второй - из второй. Как известно [42, с.160],

$U = mn + m(m+1)/2 - S$.

Поскольку S и U линейно связаны, то обычно говорят не о двух критериях - Вилкоксона и Манна-Уитни, а об одном - критерии Вилкоксона (Манна-Уитни). Свойствам этого критерия и таблицам его критических значений уделяется место во многих монографиях по математической и прикладной статистике (см., например, [18, 42, 210, 329]).

Однако в литературе имеются и неточные утверждения относительно возможностей критерия Вилкоксона. Так, отдельные авторы полагают, что с его помощью можно обнаружить любое различие между функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$. По мнению других, этот критерий нацелен на проверку равенства медиан распределений, соответствующих выборкам. Как показано ниже, и то, и другое неверно [189].

Введем обозначения. Пусть $F^{-1}(t)$ - функция, обратная к функции распределения $F(x)$. Она определена на отрезке [0; 1]. Положим $L(t) = G(F^{-1}(t))$. Поскольку $F(x)$ непрерывна и строго возрастает, то $F^{-1}(t)$ и $L(t)$ обладают теми же свойствами. Важную роль в дальнейшем изложении будет играть величина $a = P(X < Y)$. Как нетрудно показать,

$$a = P(X < Y) = \int_0^1 t dL(t).$$

Введем также параметры

$$b^2 = \int_0^1 L^2(t)dt - (1-a)^2, \quad g^2 = \int_0^1 t^2 dL(t) - a^2.$$

Тогда математические ожидания и дисперсии статистик Вилкоксона и Манна-Уитни согласно [42, с.160] выражаются через введенные величины:

$M(U) = mna$, $M(S) = mn + m(m+1)/2 - M(U) = mn(1 - a) + m(m+1)/2$,

$D(S) = D(U) = mn\,[(n - 1)\,b^2 + (m - 1)\,g^2 + a(1 - a)]$. (3.39)

Когда объемы обеих выборок безгранично растут, распределения статистик Вилкоксона и Манна-Уитни являются асимптотически нормальными [42, гл. 5 и 6] с параметрами, задаваемыми формулами (3.39).

Если выборки полностью однородны, т.е. их функции распределения совпадают, другими словами, справедлива гипотеза

H_0: $F(x) = G(x)$ *при всех* x, (3.40)

то $L(t) = t$ для t из отрезка [0, 1], $L(t)= 0$ для всех отрицательных t и $L(t)= 1$ для $t > 1$, соответственно $a= 1/2$. Подставляя в формулы (3.39), получаем, что

$M(S) = m(m+n+1)/2$, $D(S) = mn(m+n+1)/12$. (3.41).

Следовательно, распределение нормированной и центрированной статистики Вилкоксона

$T = (S - m(m+n+1)/2)\,(mn(m+n+1)/12)^{-1/2}$ (3.42)

при росте объемов выборок приближается к стандартному нормальному распределению (с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1).

Из асимптотической нормальности статистики T следует, что при больших объемах выборок правило принятия решения для критерия Вилкоксона выглядит так:

- если $|T| \leq \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, то гипотеза (3.40) однородности (тождества) функций распределений принимается на уровне значимости α,

- если же $|T| > \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, то гипотеза (3.40) однородности (тождества) функций распределений отклоняется на уровне значимости α.

В прикладной статистике наиболее часто применяется уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Тогда значение модуля статистики T Вилкоксона надо сравнивать с граничным значением $\Phi^{-1}(1-\alpha/2) = 1{,}96$.

Мощность критерия Вилкоксона. Пусть объемы выборок достаточно велики, так что можно пользоваться асимптотической нормальностью статистики Вилкоксона. Тогда в соответствии с формулами (3.39) статистика T будет асимптотически нормальна с параметрами

$M(T) = (12mn)^{1/2}\ (1/2 - a)\ (m+n+1)^{-1/2}$,

$D(T) = 12\ [(n - 1)\ b^2 + (m - 1)\ g^2 + a(1 - a)]\ (m+n+1)^{-1}$. (3.43)

Из формул (3.43) видно большое значение гипотезы

H_{01}: $a = P(X < Y) = 1/2$. (3.44)

Если эта гипотеза неверна, то, поскольку $m \leq n$, справедлива оценка

$|M(T)| \geq (12\ m\ n\ (2n+1)^{-1})^{1/2}\ |1/2 - a|$,

а потому $|M(T)|$ безгранично растет при росте объемов выборок. В то же время, поскольку

$$b^2 \leq \int_0^1 L^2(t)dt \leq 1, \quad g^2 \leq \int_0^1 t^2 dL(t) \leq 1, \quad \alpha(1-\alpha) \leq 1/4,$$

то

$D(T) \leq 12\ [(n - 1) + (m - 1) + 1/4]\ (m+n+1)^{-1} \leq 12$. (3.45)

Следовательно, вероятность отклонения гипотезы H_{01}, когда она неверна, т.е. мощность критерия Вилкоксона как критерия проверки гипотезы

(3.44), стремится к 1 при возрастании объемов выборок, т.е. критерий Вилкоксона является состоятельным для этой гипотезы при альтернативе

$AH_{01}: a = P(X < Y) \neq 1/2.$ (3.46) .

Если же гипотеза (3.44) верна, то статистика T асимптотически нормальна с математическим ожиданием 0 и дисперсией, определяемой формулой

$D(T) = 12[(n - 1)b^2 + (m - 1)g^2 + 1/4](m+n+1)^{-1}.$ (3.47)

Гипотеза (3.44) является сложной, дисперсия (3.47), как показывают приводимые ниже примеры, в зависимости от значений b^2 и g^2 может быть как больше 1, так и меньше 1, но согласно неравенству (3.45) никогда не превосходит 12.

Критерий Вилкоксона не позволяет проверять абсолютную однородность. Приведем пример двух функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ таких, что гипотеза (3.44) выполнена, а гипотеза (3.40) - нет. Поскольку

$$a = P(X < Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dG(x),\ 1 - a = P(Y < X) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dF(x) \qquad (3.48)$$

и $a = 1/2$ в случае справедливости гипотезы (3.40), то для выполнения условия (3.44) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - G(x))dF(x) = 0 \qquad (3.49),$$

а потому естественно в качестве $F(x)$ рассмотреть функцию равномерного распределения на интервале (-1; 1). Тогда формула (3.49) переходит в условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - G(x))dF(x) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left(G(x) - \frac{(x+1)}{2}\right)dx = 0.$$

Это условие выполняется, если функция $(G(x) - (x + 1)/2)$ является нечетной.

Пример 1. Пусть функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ сосредоточены на интервале (-1; 1), на котором

$F(x) = (x + 1)/2,\ G(x) = (x + 1 + 1/\pi\ \sin\pi x)/2.$

Тогда

$x=F^{-1}(t)=2t$-1, $L(t)=G(F^{-1}(t))=(2t+1/\pi\sin\pi(2t-1))/2=t+1/2\pi\sin\pi(2t-1)$.

Условие (3.49) выполнено, поскольку функция ($G(x)$ - (x + 1)/2) является нечетной. Следовательно, a = 1/2. Начнем с вычисления

$$g^2 = \int_0^1 t^2 dL(t) \ \text{- 1/4} = \int_0^1 t^2 d(t+\frac{1}{2\pi}\sin\pi(2t-1)) - \frac{1}{4}.$$

Поскольку

$$d(t+\frac{1}{2\pi}\sin\pi(2t-1)) = (1+\cos\pi(2t-1))dt,$$

то

$$g^2 = \int_0^1 t^2(1+\cos\pi(2t-1))dt - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \int_0^1 t^2\cos\pi(2t-1)dt.$$

С помощью замены переменных t = (x +1) / 2 получаем, что

$$\int_0^1 t^2\cos\pi(2t-1)dt = \frac{1}{8}\left(\int_{-1}^1 x^2\cos\pi x dx + 2\int_{-1}^1 x\cos\pi x dx + \int_{-1}^1 \cos\pi x dx\right).$$

В правой части последнего равенства стоят табличные интегралы (см., например, справочник [298, с.71]). Проведя соответствующие вычисления, получаем, что в правой части стоит $1/8\times(-4/\pi^2) = -1/(2\pi^2)$. Следовательно, $g^2 = 1/12 - 1/(2\pi^2) = 0{,}032672733...$

Перейдем к вычислению b^2. Поскольку

$$b^2 = \int_0^1 L^2(t)dt - \frac{1}{4} = \int_0^1 \left(t+\frac{1}{2}\pi\sin\pi(2t-1)\right)^2 dt - \frac{1}{4},$$

то

$$b^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 (t\sin\pi(2t-1))dt + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^1 \sin^2\pi(2t-1)dt.$$

С помощью замены переменных t = (x+1)/2 переходим к табличным интегралам (см., например, справочник [298, с.65]):

$$b^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^1 x\sin\pi x dx + \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^1 \sin\pi x dx + \frac{1}{8\pi^2}\int_{-1}^1 \sin^2\pi x dx.$$

Проведя необходимые вычисления, получим, что

$$b^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 0 + \frac{1}{8\pi^2} = \frac{1}{12} - \frac{3}{8\pi^2} = 0{,}045337893...$$

Следовательно, для рассматриваемых функций распределения нормированная и центрированная статистика Вилкоксона асимптотически нормальна с математическим ожиданием 0 и дисперсией (см. формулу (3.47))

$D(T) = (0{,}544\, n + 0{,}392\, m + 2{,}064)\, (m+n+1)^{-1}$.

Как легко видеть, дисперсия всегда меньше 1, т.е. в рассматриваемом случае гипотеза полной однородности при проверке с помощью критерия Вилкоксона будет приниматься чаще, чем если она на самом деле верна.

Сказанное означает, что критерий Вилкоксона нельзя считать критерием для проверки гипотезы (3.40) при альтернативе общего вида. Он не всегда позволяет проверить однородность - не при всех альтернативах. Точно так же широко известные критерии типа хи-квадрат нельзя считать критериями проверки гипотез согласия и однородности в случае непрерывных распределений - они позволяют обнаружить не все различия, поскольку некоторые из них «скрадывает» группировка.

Критерий Вилкоксона не позволяет проверять равенство медиан. Обсудим теперь, действительно ли критерий Вилкоксона нацелен на проверку равенства медиан распределений, соответствующих выборкам.

Пример 2. Построим семейство пар функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ таких, что их медианы различны, но для $F(x)$ и $G(x)$ выполнена гипотеза (3.44). Пусть распределения сосредоточены на интервале (0; 1), и на нем $G(x) = x$, а $F(x)$ имеет кусочно-линейный график с вершинами в точках (0; 0), (λ, 1/2), (δ, 3/4), (1; 1). Следовательно,

$F(x) = 0$ при $x < 0$;

$F(x) = x/(2\lambda)$ на $[0;\ \lambda)$;

$F(x) = 1/2 + (x - \lambda)/(4\delta - 4\lambda)$ на $[\lambda;\ \delta)$;

$F(x) = 3/4 + (x - \delta)/(4 - 4\delta)$ на $[\delta;\ 1]$;

$F(x) = 1$ при $x > 1$.

Очевидно, что медиана $F(x)$ равна λ, а медиана $G(x)$ равна 1/2 .

Согласно соотношению (3.47) для выполнения гипотезы (3.44) достаточно определить δ как функцию λ, т.е. $\delta = \delta(\lambda)$, из условия

$$\int_0^1 F(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Вычисления дают

$\delta = \delta(\lambda) = 3(1 - \lambda)/2.$

Учитывая, что δ лежит между λ и 1, не совпадая ни с тем, ни с другим, получаем ограничения на λ, а именно, $1/3 < \lambda < 3/5$. Итак, построено искомое семейство пар функций распределения.

Пример 3. Пусть, как и в примере 2, распределения сосредоточены на интервале (0; 1), и на нем $F(x)=x$. А $G(x)$ - функция распределения, сосредоточенного в двух точках - β и 1. Т.е. $G(x) = 0$ при x, не превосходящем β; $G(x) = h$ на $(\beta; 1]$; $G(x) = 1$ при $x > 1$. С такой функцией $G(x)$ легко проводить расчеты. Однако она не удовлетворяет принятым выше условиям непрерывности и строгого возрастания. Вместе с тем легко видеть, что она является предельной (сходимость в каждой точке отрезка [0; 1]) для последовательности функций распределения, удовлетворяющих этим условиям. А распределение статистики Вилкоксона для пары функций распределения примера 3 является предельным для последовательности соответствующих распределений статистики Вилкоксона, полученных в рассматриваемых условиях непрерывности и строгого возрастания.

Условие $P(X < Y) = 1/2$ выполнено, если $h = (1 - \beta)^{-1}/2$ (при β из отрезка [0; 1/2]). Поскольку $h > 1/2$ при положительном β, то очевидно, что медиана $G(x)$ равна β, в то время как медиана $F(x)$ равна 1/2 . Значит, при $\beta = 1/2$ медианы совпадают, при всех иных положительных β - различны. При $\beta = 0$ медианой $G(x)$ является любая точка из отрезка [0; 1].

Легко подсчитать, что в условиях примера 3 параметры предельного распределения имеют вид

$b^2 = \beta(1-\beta)^{-1}/4$, $g^2 = (1-2\beta)/4$.

Следовательно, распределение нормированной и центрированной статистики Вилкоксона будет асимптотически нормальным с математическим ожиданием 0 и дисперсией

$D(T) = 3\,[(n-1)\,\beta(1-\beta)^{-1} + (m-1)\,(1-2\beta) + 1]\,(m+n+1)^{-1}$.

Проанализируем величину $D(T)$ в зависимости от параметра β и объемов выборок m и n. При достаточно больших m и n

$D(T) = 3w\beta(1-\beta)^{-1} + 3(1-w)(1-2\beta)$

с точностью до величин порядка $(m+n)^{-1}$, где $w= n/(m+n)$. Значит, $D(T)$ - линейная функция от w, а потому достигает экстремальных значений на границах интервала изменения w, т.е. при $w = 0$ и $w = 1$. Легко видеть, что при $\beta(1-\beta)^{-1} < 1-2\beta$ минимум равен $3\beta(1-\beta)^{-1}$ (при $w = 1$), а максимум равен $3(1-2\beta)$ (при $w = 0$). В случае $\beta(1-\beta)^{-1} > 1-2\beta$ максимум равен $3\beta(1-\beta)^{-1}$ (при $w = 1$), а минимум равен $3(1-2\beta)$ (при $w = 0$). Если же $\beta(1-\beta)^{-1} = 1-2\beta$ (это равенство справедливо при $\beta=\beta_0 = 1 - 2^{-1/2} = 0{,}293$), то $D(T)=3(2^{1/2}-1) = 1{,}2426...$ при всех w из отрезка [0; 1].

Первый из описанных выше случаев имеет быть при $\beta < \beta_0$. При этом минимум $D(T)$ возрастает от 0 (при $\beta=0$, $w=1$ - предельный случай) до $3(2^{1/2} - 1)$ (при $\beta=\beta_0$, w - любом), а максимум уменьшается от 3 (при $\beta=0$, $w=0$ - предельный случай) до $3\,(2^{1/2} - 1)$ (при $\beta=\beta_0$, w - любом). Второй случай относится к β из интервала $(\beta_0;\ 1/2]$. При этом минимум убывает от приведенного выше значения для $\beta=\beta_0$ до 0 (при $\beta=1/2$, $w=0$ - предельный случай) , а максимум возрастает от того же значения при $\beta=\beta_0$ до 3 (при $\beta=1/2$, $w=0$).

Таким образом, $D(T)$ может принимать все значения из интервала (0; 3) в зависимости от значений β и w. Если $D(T) < 1$, то при применении критерия Вилкоксона к выборкам с рассматриваемыми функциями распределения гипотеза однородности (3.40) будет приниматься чаще (при соответствующих значениях β и w - с вероятностью, сколь угодно близкой к 1), чем если бы она самом деле была верна. Если $1<D(T)<3$, то гипотеза (3.40) также принимается достаточно часто. Так, если уровень значимости критерия Вилкоксона равен 0,05, то (асимптотическая) критическая область этого критерия, как показано выше, имеет вид $\{T: |T| \geq 1{,}96\}$. Если - самый плохой случай - $D(T)= 3$, то гипотеза (3.40) принимается с вероятностью 0,7422.

Гипотеза сдвига. При проверке гипотезы однородности мы рассмотрели различные виды нулевых и альтернативных гипотез - гипотезу (3.40) и ее отрицание в качестве альтернативы, гипотезу (3.44) и ее отрицание, гипотезы о равенстве или различии медиан. В теоретических работах по математической статистике часто рассматривают гипотезу сдвига, в которой альтернативой гипотезе (3.40) является гипотеза

$$H_1:\ F(x) = G(x + r) \qquad (3.50)$$

при всех x и некотором сдвиге r, отличным от 0. Если верна альтернативная гипотеза H_1, то вероятность $P(X < Y)$ отлична от 1/2, а потому при альтернативе (3.50) критерий Вилкоксона является состоятельным.

В некоторых прикладных постановках гипотеза (3.50) представляется естественной. Например, если одним и тем же прибором проводятся две серии измерений двух значений некоторой величины (физической, химической и т.п.). При этом функция распределения $G(x)$ описывает погрешности измерения одного значения, а $G(x+r)$ - другого. Однако при анализе подавляющего большинства конкретных статистических данных, как правило, нет никаких оснований считать, что отсутствие однородности всегда выражается столь однозначным образом, как следует из формулы (3.50). Поэтому для проверки однородности необходимо использовать статистические критерии, состоятельные против любого отклонения от гипотезы (3.40), а не только против альтернативы сдвига.

Отметим еще одно обстоятельство. Часто говорят (в соответствии с классическим подходом математической статистики), что нельзя проверять нулевые гипотезы без рассмотрения альтернативных. Однако при анализе данных, полученных в ходе организационно-экономических, технических, медицинских или иных исследований, зачастую полностью ясна формулировка той гипотезы, которую желательно проверить (например, гипотезы абсолютной (иногда говорят, полной) однородности - см. формулу (3.40)), в то время как формулировка альтернативной гипотезы не очевидна. То ли это гипотеза о неверности равенства (3.40) хотя бы для одного значения x, то ли это альтернатива (3.46), то ли - альтернатива сдвига (3.50), и т.д. В таких случаях целесообразно «обернуть» задачу - исходя из статистического критерия найти альтернативы, относительно которых он состоятелен. Именно это и проделано выше для критерия Вилкоксона.

Состоятельные критерии проверки однородности независимых выборок. Естественно потребовать, чтобы рекомендуемый для массового использования в управленческих, экономических, технических, медицинских и иных исследованиях критерий однородности был состоятельным, т.е. для любых отличных друг от друга функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ (другими словами, при справедливости альтернативной гипотезы H_1) вероятность отклонения гипотезы H_0 должна стремиться к 1 при увеличении объемов выборок m и n. Из перечисленных выше критериев однородности состоятельными являются только критерии Смирнова и типа омега-квадрат. Проведенное в Институте высоких статистических технологий и эконометрики исследование мощности (методом статистических испытаний) первых четырех из перечисленных выше критериев (при различных вариантах функций распределения $F(x)$ и $G(x)$) подтвердило преимущество критериев Смирнова и омега-квадрат и при малых объемах выборок 6 - 12. Рассмотрим эти критерии подробнее.

Критерий Смирнова однородности двух независимых выборок. Он был предложен членом-корреспондентом АН СССР Н.В. Смирновым в 1939 г. (см. [291]). Единственное ограничение - функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ должны быть непрерывными. Значение эмпирической функции распределения в точке x равно доле результатов наблюдений в выборке, меньших x [18]. Критерий Смирнова основан на использовании эмпирических функций распределения $F_m(x)$ и $G_n(x)$, построенных по первой и второй выборкам соответственно. Значение статистики Смирнова

$$D_{m,n} = \sup_x | F_m(x) - G_n(x) |$$

сравнивают с соответствующим критическим значением (см., например, [18]) и по результатам сравнения принимают или отклоняют гипотезу H_0 о совпадении (однородности) функций распределения. Практически значение статистики $D_{m,n}$ рекомендуется согласно [18] вычислять по формулам

$$D^+_{m,n} = \max_{1\le r\le n}\left[\frac{r}{n} - F_m(y'_r)\right] = \max_{1\le r\le m}\left[G_n(x'_s) - \frac{s-1}{m}\right], \quad (3.51)$$

$$D^-_{m,n} = \max_{1\le r\le n}\left[F_m(y'_r) - \frac{r-1}{n}\right] = \max_{1\le r\le m}\left[\frac{s}{m} - G_n(x'_s)\right], \quad (3.52)$$

$$D_{m,n} = \max(D^+_{m,n}, D^-_{m,n}), \qquad (3.53)$$

где $x'_1<x'_2<\ldots<x'_m$ - элементы первой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_m$, переставленные в порядке возрастания, а $y'_1 < y'_2 < \ldots < y'_n$ - элементы второй выборки $y_1, y_2, \ldots, y_n$, также переставленные в порядке возрастания. Поскольку функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ предполагаются непрерывными, то вероятность совпадения каких-либо выборочных значений равна 0.

Разработаны алгоритмы и программы для ЭВМ, позволяющие рассчитывать точные распределения, процентные точки и достигаемый уровень значимости для двухвыборочной статистики Смирнова $D_{m,n}$, разработаны подробные таблицы (см., например, нашу методику [136], содержащую описание алгоритмов, тексты программ и подробные таблицы).

Однако у критерия Смирнова есть и недостатки. Его распределение сосредоточено в сравнительно небольшом числе точек. Ясно, что принимаемые этой статистикой значения пропорциональны величине $1/L$, где L – наименьшее общее кратное объемов выборок m и n. Поэтому функция распределения растет большими скачками. Для примера с выборками объемов 12 и 14 L – наименьшее общее кратное 12 и 14, т.е. 84. Следовательно, значения, принимаемые статистикой Смирнова, входят в арифметическую прогрессию с шагом 1/84 = 0,012. Именно поэтому соответствующие критические значения в сборнике [18] приведены в виде дроби с знаменателем L = 84.

Кроме того, не удается выдержать заданный уровень значимости. Реальный (другими словами, истинный) уровень значимости может значительно, даже в несколько раз отличаться от номинального (см. ниже)).

При больших объемах выборок можно воспользоваться теоремой Н.В. Смирнова [291]: в случае совпадения непрерывных функций распределения элементов двух независимых выборок

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} P\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} < y\right\} = K(y),$$

где $K(y)$ – функция распределения Колмогорова. Поскольку согласно [18] квантиль порядка 0,9 функции распределения Колмогорова равна 1,224, то критическое значение статистики Смирнова $D_{m,n}$, соответствующее уровню значимости 10%, при больших объемах выборок имеет вид $1{,}224\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$. При m=12, n=14 эта формула дает 0,4815, в то время как точное значение равно 0,464. Видим, что приближение удовлетворительное, т.е. рассматриваемые объемы выборок можно считать большими.

Критерий типа омега-квадрат (Лемана-Розенблатта). Его статистика имеет вид:

$$A = \frac{mn}{m+n}\int_{-\infty}^{\infty}(F_m(x) - G_n(x))^2\, dH_{m+n}(x),$$

где $H_{m+n}(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по объединенной выборке. Легко видеть, что

$$H_{m+n}(x) = \frac{m}{m+n} F_m(x) + \frac{n}{m+n} G_n(x).$$

Статистика A типа омега-квадрат была предложена Э. Леманом в 1951 г., изучена М. Розенблаттом в 1952 г., а затем и другими исследователями [366]. Она зависит лишь от рангов элементов двух выборок в объединенной выборке. Пусть $x_1, x_2, ..., x_m$ - первая выборка, $x_1^{'} < x_2^{'} < ... x_m^{'}$ - соответствующий вариационный ряд, $y_1, y_2, ..., y_n$ - вторая выборка, $y_1^{'} < y_2^{'} < ... < y_n^{'}$ - вариационный ряд, соответствующий второй выборке. Поскольку функции распределения независимых выборок непрерывны, то с вероятностью 1 все выборочные значения различны, совпадения отсутствуют. Статистика A представляется в виде (см., например, [18]):

$$A = \frac{1}{mn(m+n)}[m\sum_{i=1}^{m}(r_i - i)^2 + n\sum_{j=1}^{n}(s_j - j)^2] - \frac{4mn-1}{6(m+n)},$$

где r_i - ранг x'_i и s_j - ранг y'_j в общем вариационном ряду, построенном по объединенной выборке.

Правила принятия решений при проверке однородности двух выборок на основе статистик Смирнова и типа омега-квадрат, т.е. таблицы критических значений в зависимости от уровней значимости и объемов выборок приведены, например, в [18]. При достаточно больших объемах выборок правило принятия решения формулируется просто: если наблюдаемое значение статистики меньше соответствующего квантиля предельного распределения, гипотеза однородности принимается, в противном случае отклоняется. Известно [210], что

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} P\{A < x\} = a_1(x)$$

(в обозначениях [18]), где $a_1(x)$ – предельная функция распределения классической статистики омега-квадрат (Крамера-Мизеса-Смирнова), используемой для проверки согласия эмпирического распределения с заданным теоретическим.

Рекомендации по выбору критерия однородности. Для критерия типа омега-квадрат (Лемана-Розенблатта) нет выраженного эффекта различия между номинальными и реальными уровнями значимости. Поэтому мы *рекомендуем для проверки однородности функций распределения (гипотеза H_0) применять статистику А типа омега-квадрат. Если методическое, табличное или программное обеспечение для статистики Лемана - Розенблатта отсутствует, рекомендуем использовать критерий Смирнова. Для проверки однородности математических ожиданий (гипотеза H'_0) целесообразно применять критерий Крамера-Уэлча.* По нашему мнению, статистики Стьюдента, Вилкоксона и др. допустимо использовать лишь в отдельных частных случаях, рассмотренных выше.

Даже из проведенного выше разбора лишь одной из типичных статистических задач экономико-математического моделирования - задачи проверки однородности двух независимых выборок - можно сделать вывод о целесообразности широкого развертывания работ по критическому анализу сложившейся практики статистической обработки данных и по внедрению накопленного арсенала современных методов прикладной статистики [377]. По нашему мнению, широкого внедрения заслуживают, в частности, методы многомерного статистического анализа, планирования эксперимента, статистики объектов нечисловой природы. Очевидно, рассматриваемые работы должны быть плановыми, организационно оформленными, проводиться мощными самостоятельными организациями и подразделениями. Целесообразно создание службы статистических консультаций в системе научно-исследовательских учреждений и вузов технического, экономического, медицинского профиля, а также в рамках корпораций и промышленных предприятий. Этот инновационный проект подробно разработан в специальной литературе [181, 204].

Реальные и номинальные уровни значимости в задачах проверки статистических гипотез. Во многих монографиях, справочниках и таблицах (например, [6, 58, 78]) при проверке статистических гипотез критические значения статистик указаны для априорно фиксированных (номинальных в терминологии [81]) уровней значимости α_i . В качестве таковых обычно используются значения из тройки чисел 0,01, 0,05, 0,1, к которым иногда добавляют еще несколько: 0,001, 0,005, 0,02 и др.

Однако ясно, что для дискретных статистик (т.е. статистик с дискретными функциями распределения), к которым относятся все непараметрические статистические критерии, реальные уровни значимости α_D могут и не совпадать с номинальными. Под α_D понимается максимально возможный уровень значимости дискретной статистики, не превосходящий заданный номинальный α_i (т.е при переходе к следующему по величине возможному значению дискретной статистики соответствующий уровень значимости оказывается больше заданного номинального). Поэтому в лучших таблицах [18, 329] для ограниченных объемов выборок (2 - 100) табулируются точные распределения дискретных статистик. Для каждой конкретной статистики реальный уровень значимости α_D - функция от объемов выборок $n = (n_1, \ldots, n_t)$, т.е. $\alpha_D = \alpha_D(n)$. (Здесь t – число выборок, по которым рассчитывается значение статистики; рассматриваем в основном случай двух выборок, т.е. $t = 2$.)

В одних таблицах приведены α_D [18, 329], в других - нет [6, 58, 78]. Возникает естественный вопрос: с чем это связано? Либо в работах [6, 58, 78] нарушена культура табулирования, либо реальные α_D и номинальные α_i уровни значимости мало отличаются для всех n. Продемонстрируем, что по крайней мере для некоторых статистик выполнено первое.

В качестве примера рассмотрим критерий серий (Вольфовица) проверки однородности двух независимых выборок. Статистика этого критерия V – это число серий, т.е. частей общего вариационного ряда двух выборок, каждая из которых состоит из элементов одной выборки. При справедливости нулевой гипотезы о тождестве функций распределения, соответствующих двум независимым выборкам объемов n_1 и n_2, известно точное распределение [18, табл.6.7]:

$$P(V = r \mid n_1, n_2) = \begin{cases} \dfrac{2C_{n_1-1}^{k-1}C_{n_2-1}^{k-1}}{C_{n_1+n_2}^{n_1}}, \ \text{если} \ r = 2k, \\ \dfrac{C_{n_1-1}^{k}C_{n_2-1}^{k-1} + C_{n_1-1}^{k-1}C_{n_2-1}^{k}}{C_{n_1+n_2}^{n_1}}, \ \text{если} \ r = 2k+1, \end{cases}$$

где $r = 2, 3, \ldots, 2n_1$ при $n_1 = n_2$ и $r = 2, 3, \ldots, 2n_1 + 1$ при $n_1 < n_2$ (без ограничения общности можно принять, что $n_1 \le n_2$).

Расчет для номинального уровня значимости $\alpha_í$ = 0,05 показывает, что

при $n_1 = n_2 = 6$ реальный уровень значимости $\alpha_Ð = 0{,}0260$;

при $n_1 = n_2 = 8$ реальный уровень значимости $\alpha_Ð = 0{,}0178$;

при $n_1 = n_2 = 10$ реальный уровень значимости $\alpha_Ð = 0{,}0370$;

при $n_1 = n_2 = 12$ реальный уровень значимости $\alpha_Ð = 0{,}0190$.

Таким образом, для рассматриваемых объемов выборок реальный уровень значимости в 2-3 раза меньше, чем номинальный. Это необходимо учитывать при интерпретации результатов анализа реальных статистических данных.

Соотношение реальных (истинных) и номинальных уровней значимости было изучено нами [81] на примере непараметрических критериев проверки однородности двух независимых выборок. В табл.3.6, построенной в [81] по данным [18, 29, 329], для ряда непараметрических критериев проверки однородности двух независимых выборок приведены реальные уровни значимости $\alpha_Ð(n)$ для номинального уровня значимости $\alpha_í$ = 0,05 и объемов выборок $n_1 = n_2 = 6, 8, 10, 12$. Изучены пять критериев.

1. Двухвыборочный критерий Вилкоксона, являющийся линейной функцией от критерия Манна-Уитни и подробно рассмотренный выше. Напомним, что статистика Вилкоксона S - это сумма рангов элементов первой выборки

$S = R_1 + R_2 + ... + R_{n_1}$

в общем вариационном ряду, построенном по объединенной выборке, включающей в себя все элементы обеих выборок (без ограничения общности можно принять, что объем первой выборки не превосходит объема второй выборки, т.е. $n_1 \le n_2$).

2. Критерий Ван-дер-Вардена [18, 29], представляющий собой дальнейшее развитие (модификацию) критерия Вилкоксона и предназначенный для анализа выборок, распределение которых близко к нормальному. Статистика X критерия Ван-дер-Вардена имеет вид

$$X = \Phi^{-1}\left\{\frac{R_1}{n_1 + n_2 + 1}\right\} + \Phi^{-1}\left\{\frac{R_2}{n_1 + n_2 + 1}\right\} + ... + \Phi^{-1}\left\{\frac{R_{n_1}}{n_1 + n_2 + 1}\right\},$$

где $\Phi^{-1}(p)$ есть квантиль порядка p стандартного нормального распределения $\Phi(x)$ с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, т.е. $\Phi^{-1}(p)$ - обратная функция к $\Phi(x)$.

3. Двухвыборочный двухсторонний критерий Смирнова однородности двух независимых выборок, рассмотренный выше. Он основан на использовании разности эмпирических функций распределения $F_{n_1}(x)$ и $G_{n_2}(x)$ построенных по первой и второй выборкам соответственно. Термин «двухсторонний» означает, что берется супремум модуля этой разности. Статистика двухвыборочного двухстороннего критерия Смирнова

$$D = D(n_1, n_2) = \sup_x \left|F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x)\right|$$

в случае равенства объемов выборок $n_1 = n_2$ принимает значения, кратные $1/n_1$, поскольку только такие значения принимают эмпирические функции распределения $F_{n_1}(x)$ и $G_{n_2}(x)$, а потому рассматриваемая статистика имеет (n_1+1) возможных значений.

4. Критерий знаков Z используют в случае равенства объемов выборок $n_1 = n_2$. Статистика этого критерия равна числу положительных разностей X_k - Y_k элементов двух выборок с одинаковыми номерами. При спра-

ведливости нулевой гипотезы статистика Z имеет биномиальное распределение $B(1/2; n_1)$, а потому имеет (n_1+1) возможных значений.

5. Критерий серий (Вольфовица) V, о котором шла речь выше. Число его возможных значений не превосходит $2n_1$.

Таблица 3.6

Реальные уровни значимости $\alpha_D(n)$ для $\alpha_{\acute{\imath}}$ = 0,05

Наименование и обозначение критерия	Объемы выборок $n_1 = n_2$				Примечания и ссылки
	6	8	10	12	
Вилкоксона S	0,0320	0,0400	0,0480	0,0420	[329, с.280-281], [29, с.418]
Ван-дер-Вардена X	0,0498	0,0498	0,0500	0,0500	Рассчитано по методике [29, с.249-250]
Смирнова D	0,0044	0,0372	0,0246	0,0158	[18, с.412], [329, с.406-427]
Знаков Z	0,0312	0,0078	0,0214	0,0386	[329, с.273-274]
Вольфовица (серий) V	0,0260	0,0178	0,0370	0,0190	Рассчитано по методике [18, с.91-92]

Анализ содержания табл. 3.6 подтверждает предположение о существенности отличия реальных уровней значимости $\alpha_D(n)$ от номинальных уровней значимости $\alpha_{\acute{\imath}}$.

Предположим теперь, что, несмотря на установленные отличия, мы используем при проверке гипотезы однородности таблицы [6, 58, 78], в которых указаны $\alpha_{\acute{\imath}} > \alpha_D$, а не α_D. Это приводит к снижению мощности критерия по сравнению с соответствующим рандомизированным критерием, обеспечивающим равенство α_D и $\alpha_{\acute{\imath}}$.

Разъяснение. Поясним, что такое рандомизированный критерий. Пусть Y – статистика некоторого статистического критерия, принимающая дискретные значения, числа a и b, где $a < b$ - два соседних значения этой статистики, такие, что $P(Y > b) < \alpha_{\acute{\imath}}$ и $P(Y > a) > \alpha_{\acute{\imath}}$ (вероятности взяты в предположении справедливости нулевой гипотезы). Если критическое значение критерия равно b, т.е. нулевая гипотеза принимается при $Y \leq b$, то $\alpha_D = P(Y > b) < \alpha_{\acute{\imath}}$. Если же критическое значение равно следующему возможному (при движении в сторону уменьшения) значению a, т.е. нулевая гипотеза принимается при $Y \le a$, то $\alpha_D = P(Y > a) > \alpha_í$. Рандомизированный критерий получим, если при $Y = b$ в некоторой доле p случаев будем принимать нулевую гипотезу, а в остальных случаях – альтернативную. Поскольку

$P(Y = b) = P(Y > a) - P(Y > b)$,

то (реальный) уровень значимости рандомизированного критерия равен

$(1 - p)\ P(Y = b) + P(Y > b) = (1 - p)\ P(Y > a) + p\ P(Y > b)$.

Ясно, что при соответствующем выборе параметра рандомизации p уровень значимости рандомизированного критерия совпадет с заданным номинальным уровнем $\alpha_í$.

Для малых объемов выборок (2 - 20 элементов) понижение мощности из-за того, что $\alpha_í > \alpha_D$, может быть существенным. Для иллюстрации этого в табл. 3.7 приведены результаты моделирования [81] наиболее употребительных (согласно [18]) критериев проверки однородности двух независимых выборок.

Таблица 3.7

Мощности статистических критериев при $\alpha_í$ = 0,05

Номер эксперимента	Объем выборок $n_1 = n_2$	Параметры				Мощность M статистического критерия				
		m_1	m_2	σ_1^2	σ_2^2	S	V	X	D	t
1	6	0	1	1	1	0,318	0,006	0,298	0,238	0,396
2	8	0	1	1	1	0,452	0,104	0,426	0,068	0,484
3	10	0	1	1	1	0,520	0,180	0,534	0,116	0,598
4	12	0	1	1	1	0,632	0,076	0,618	0,462	0,682
5	6	0	2	1	1	0,828	0,308	0,808	0,716	0,904
6	8	0	2	1	1	0,958	0,510	0,954	0,458	0,976
7	10	0	2	1	1	0,984	0,704	0,990	0,632	0,988
8	12	0	2	1	1	0,996	0,568	0,996	0,978	0,998

Моделируются выборки одинакового объема из нормальных законов распределения с математическими ожиданиями m_1 и m_2 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2. Номинальный уровень значимости, определяющий конкретные критические значения для критериев, принят равным $\alpha_í$ = 0,05. Мощность критерия определяется моделированием N = 5000 пар выборок. При использовании N = 5000 моделируемых пар выборок среднее квадратическое отклонение оценок мощности $\sigma_M \le 0{,}0223$ (при $M \ge 0{,}95$ имеем $\sigma_M \le 0{,}01$).

Изучены критерии Вилкоксона S, Вольфовица V, Ван-дер-Вардена X, Смирнова D. Критерий Стьюдента t (см. например, [18]), как равномерно наиболее мощный в классе нормальных законов распределения, приведен для сравнительной оценки мощности рассматриваемых непараметрических критериев.

Замечание. Приведенные в табл. 3.7 значения мощностей критериев интересны нам с точки зрения обсуждения их зависимости от различия реальных и номинальных уровней значимости. При этом необходимо подчеркнуть, что эти значения зависят от предположений, принятых при моделировании. Так, критерии Вилкоксона и Ван-дер-Вардена «настроены» на использование в случае распределений, близких к нормальному семейству. При проверке гипотезы о совпадении функций распределения двух независимых выборок из логистического распределения с альтернативой сдвига критерий Вилкоксона является асимптотически оптимальным. А в случае выборок из нормального распределения аналогичным свойством обладает критерий Ван-дер-Вардена, причем известно, что семейства нормальных и логистических распределений весьма близки – расстояние Колмогорова между ними не превышает 0,01 (см. по вопросам асимптотической оптимальности непараметрических критериев [85, 94, 159]). Поэтому мощности критериев Вилкоксона и Ван-дер-Вардена близки к оптимуму в случае нормального распределения – к мощности критерия Стьюдента. При этом мощности критериев Смирнова и особенно критерия Вольфовица заметно меньше. Однако для выборок из других распределений (например, распределений Вейбулла-Гнеденко или гамма-распределений) ситуация иная – критерий Смирнова, как показывает компьютерное моделирование, оказывается более мощным, чем критерии Вилкоксона и Ван-дер-

Вардена. Более того, критерий Смирнова – состоятельный, т.е. позволяет отклонить любую конкретную альтернативу (при соответствующих объемах выборок), а критерии Вилкоксона и Ван-дер-Вардена не являются состоятельными, некоторых альтернатив они «не чувствуют» (см. выше в настоящем разделе). Поэтому вполне обоснованной является рекомендация о широком использовании состоятельных критериев Смирнова и типа омега-квадрат (Лемана-Розенблатта). Что же касается критерия серий (Вольфовица), то из-за его отрицательных свойств (выраженной дискретности, низкой мощности) он в настоящее время выходит из употребления при анализе реальных данных, несмотря на прозрачность определения.

Рассмотрения настоящего раздела позволяют сделать следующие выводы [81].

1. При создании методик и таблиц необходимо соблюдать определенную культуру табулирования. В качестве положительных примеров можно указать работы [18, 329].

2. При малых объемах выборок использовать номинальные уровни значимости $\alpha_{\hat{I}}$ вместо реальных уровней значимости α_D для дискретных статистик недопустимо.

3. При конечных объемах выборок выбор того или иного критерия с дискретной статистикой должен сопровождаться исследованием влияния варьирования уровня значимости на качественную интерпретацию результатов проверки гипотез. В частности, выбор одного из двух конкурирующих непараметрических критериев K_1 и K_2 прежде всего должен зависеть от априорного выбора исследователем реального уровня значимости α_{D1} или α_{D2}, соответствующего первому критерию K_1 или второму K_2, в качестве номинального уровня значимости $\alpha_{\hat{I}}$.

Последний вывод демонстрирует сложность сравнения критериев с дискретными статистиками между собой, поскольку точки скачков распределений их статистик не совпадают. Следовательно, в отличие от критериев с непрерывными статистиками нельзя выбрать единый фиксированный уровень значимости и сравнить свойства критериев при этом уровне значимости.

В заключение отметим, что для любого критерия проверки статистических гипотез реальный уровень значимости приближается к номинальному при безграничном возрастании объемов выборок, т.е. $\alpha_D(n) \to \alpha_f$ при $\min(n_1,...,n_i) \to \infty$. Поэтому для прикладных исследований значительный интерес представляет определение верхней оценки скорости сходимости $\alpha_D(n)$ к α_f. Соответствующие теоретические результаты для критериев проверки однородности двух независимых или связанных выборок можно получить, основываясь на оценках скорости сходимости в принципе инвариантности [210, гл.4]. Некоторые оценки приведены в [170, гл.2] и [369]. Скорость сходимости также может быть оценена методом статистических испытаний (Монте-Карло). Пример подобного исследования подробно рассмотрен в [170] в ходе обсуждения проблем вероятностно-статистического моделирования помех, создаваемых электровозами.

Методы проверки однородности для связанных выборок. Начнем с практического примера. Для каждой из 213 партий мастики представлены два числа - результат измерения вязкости на нестандартном приборе фабрики им. Ногина и результат измерения вязкости на стандартном вискозиметре ВЗ-4. По просьбе главного инженера Рошальского химического комбината (Московская обл.) требуется установить, дают ли два указанных метода сходные результаты. Если они дают сходные результаты, то нет необходимости вводить в соответствующий ГОСТ указание о методе определения вязкости. Если же методы дают существенно различные результаты, то подобное указание ввести необходимо.

Для применения ЭММиМ необходимо сформировать вероятностную модель. Считаем, что статистические данные имеют вид $(x_i, y_i), i = 1,2,...,213,$ где x_i -результат измерения на нестандартном приборе фабрики им. Ногина в i-ой партии, а y_i - результат измерения вязкости на стандартном вискозиметре ВЗ-4 в той же i-ой партии. Пусть a_i - истинное значение показателя качества в i-ой партии. Естественно считать, что указанные выше случайные вектора независимы в совокупности. При этом они не являются одинаково распределенными, поскольку отличаются истинными значениями показателей качества a_i. Принимаем, что *при каждом i случайные величины* $x_i - a_i$ *и* $y_i - a_i$ *независимы и одинаково распределены*. Это условие и означает *однородность в связанных выборках.* Параметры связи - величины a_i . Их наличие не позволяет объединить первые координаты в одну выборку, вторую - во вторую, как делалось в случае проверки однородности двух независимых выборок.

В предположении непрерывности функций распределения из условия однородности в связанных выборках вытекает, что

$$P(x_i < y_i) = P(x_i \geq y_i) = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим случайные величины $Z_i = x_i - y_i, \quad i = 1,2,...,213.$ Из последнего соотношения вытекает, что при справедливости гипотезы однородности для связанных выборок эти случайные величины имеют нулевые медианы. Другими словами, проверка того, что два метода измерения вязкости дают схожие результаты, эквивалентна проверке равенства 0 медиан величин Z_i.

Для проверки гипотезы о том, что медианы величин Z_i нулевые, применим широко известный критерий знаков (см., например, справочник [18, с.89-91]). Согласно этому критерию необходимо подсчитать, в скольких партиях $x_i < y_i$ и в скольких $x_i \geq y_i$. Для представленных химическим комбинатом данных $x_i < y_i$ в 187 случаях из 213 и $x_i \geq y_i$ в 26 случаях из 213.

Если рассматриваемая гипотеза верна, то число W осуществлений события $\{x_i < y_i\}$ имеет биномиальное распределение с параметрами p = 1/2 и n = 213. Математическое ожидание $M(W)$=106,5, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 7{,}3.$ Следовательно, интервал $M(W) \pm 3\sigma$ - это интервал $84 \leq W \leq 129$. Найденное по данным химического комбината значение W=187 лежит далеко вне этого интервала. Поэтому рассматриваемую гипотезу необходимо отвергнуть (на любом используемом в прикладных работах уровне значимости, в частности, на уровне значимости 1%).

Таким образом, статистический анализ показывает, что два метода дают существенно различные результаты - по прибору фабрики им. Ногина результаты измерений, как правило, меньше, чем по вискозиметру ВЗ-4. Это означает, что в соответствующий ГОСТ целесообразно ввести указание на метод определения вязкости.

Система вероятностных моделей при проверке гипотезы однородности для связанных выборок. Как и в случае проверки однородности для независимых выборок, система вероятностных моделей состоит из трех уровней. Наиболее простая модель - на уровне однородности альтернативного признака - уже рассмотрена. Она сводится к проверке гипотезы о значении параметра биномиального распределения:

$$H_0 : p = \frac{1}{2}.$$

Речь идет о «критерии знаков». При справедливости гипотезы однородности число W осуществлений события $\{x_i < y_i\}$ имеет биномиальное распределение с вероятностью успеха p = 1/2 и числом испытаний n. Альтернативная гипотеза состоит в том, что вероятность успеха отличается от 1/2:

$$H_1 : p \neq \frac{1}{2}.$$

Гипотезу p = 1/2 можно проверять как непосредственно с помощью биномиального распределения (используя таблицы или программное обеспечение), так и опираясь на теорему Муавра-Лапласа. Согласно этой теореме

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{2W-n}{\sqrt{n}} \leq x\} = \Phi(x)$$

при всех x, где $\Phi(x)$ - функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Из теоремы Муавра-Лапласа вытекает правило принятия решений на уровне значимости 5%: если

$$\left|\frac{2W-n}{\sqrt{n}}\right| \le 1{,}96,$$

то гипотезу однородности связанных выборок принимают, в противном случае отклоняют. Как обычно, при желании использовать другой уровень значимости применяют в качестве критического значения иной квантиль нормального распределения. Использование предельных теорем допустимо при достаточно больших объемах выборки. По поводу придания точного смысла термину «достаточно большой» продолжаются дискуссии. Обычно считается, что несколько десятков (два-три десятка) - это уже «достаточно много». Надо подчеркнуть, что ответ на этот вопрос зависит от задачи, от ее сложности и практической значимости.

Второй уровень моделей проверки однородности связанных выборок - это уровень проверки однородности характеристик, прежде всего однородности математических ожиданий. Исходные данные - количественные результаты измерений (наблюдений, испытаний, анализов, опытов) двух признаков x_j и y_j , j = 1,2,…,n, а непосредственно анализируются их разности $Z_j = x_j - y_j$, j = 1,2,…,n. Предполагается, что эти разности независимы в совокупности и одинаково распределены, но их функция распределения неизвестна. Необходимо проверить непараметрическую гипотезу

$$H_{01} : M(Z_j) = 0.$$

Альтернативная гипотеза также является непараметрической и имеет вид:

$$H_{11} : M(Z_j) \ne 0.$$

Как и в случае проверки гипотезы согласованности для независимых выборок с помощью критерия Крамера-Уэлча, в рассматриваемой ситуации естественно использовать статистику

$$Q = \sqrt{n}\frac{\overline{Z}}{s(Z)},$$

где $\overline{Z}$ - среднее арифметическое разностей, а $s(Z)$ - выборочное среднее квадратическое отклонение. Из центральной Предельной Теоремы теории вероятностей и теорем о наследовании сходимости, полученных в монографии [170], вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{Q \le x\} = \Phi(x)$$

при всех x, где $\Phi(x)$ - функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Отсюда вытекает правило принятия решений на уровне значимости 5%: если $|Q| \le 1{,}96,$ то гипотезу однородности математических ожиданий связанных выборок принимают, в противном случае отклоняют. Как обычно, при желании использовать другой уровень значимости применяют в качестве критического значения иной квантиль нормального распределения. Повторим, что использование предельных теорем допустимо при достаточно больших объемах выборки.

Третий уровень моделей проверки однородности связанных выборок - это уровень проверки однородности (совпадения) функций распределения. Необходимо проверить непараметрическую гипотезу наиболее всеохватного вида:

$$H_{03} : F(x) = G(x), x \in R^1,$$

где

$$F(x) = P(x_i \le x), G(x) = P(y_i \le x).$$

При этом предполагается, что все участвующие в вероятностной модели случайные величины независимы (в совокупности) между собой.

Отметим одно важное свойство функции распределения случайной величины Z. Если случайные величины x и y независимы и одинаково распределены, то для $H(x)=P(Z\le x)$ выполнено, как нетрудно видеть, соотношение

$H(-x)=1 - H(x)$.

Это соотношение означает симметрию функции распределения относительно 0. Плотность такой функции распределения является четной функцией, ее значения в точках x и $(-x)$ совпадают.

Какого типа отклонения от гипотезы симметрии можно ожидать при альтернативных гипотезах?

Как и в случае проверки однородности независимых выборок, в зависимости от вида альтернативной гипотезы выделяют два подуровня моделей. Рассмотрим сначала альтернативу сдвига

$H_{13} : G(x) = F(x + a).$

В этом случае распределение Z при альтернативе отличается сдвигом от симметричного относительно 0. Для проверки гипотезы однородности может быть использован критерий знаковых рангов, разработанный Вилкоксоном (см., например, справочник [329, с.46-53]). Он строится следующим образом. Пусть $R(Z_j)$ является рангом $|Z_j|$ в ранжировке от меньшего к большему абсолютных значений разностей $|Z_1|$, $|Z_2|,\ldots,|Z_n|$, $j=1,2,\ldots,n$. Положим

$$Q(Z_j) = \begin{cases} 1, Z_j > 0, \\ 0, Z_j < 0. \end{cases}$$

для $j=1,2,\ldots,n$. Статистика критерия знаковых рангов имеет вид

$$W^+ = \sum_{j=1}^{n} R(Z_j)Q(Z_j).$$

Таким образом, нужно просуммировать ранги положительных разностей в вариационном ряду, построенном стандартным образом по абсолютным величинам всех разностей.

Для практического использования статистики критерия знаковых рангов Вилкоксона либо обращаются к соответствующим таблицам и программному обеспечению, либо применяют асимптотические соотношения. При выполнении нулевой гипотезы статистика

$$W^{++} = \frac{W^{+} - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

имеет асимптотическое (при $n \to \infty$) стандартное нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Следовательно, правило принятия решений на уровне значимости 5%: имеет обычный вид если $|W^{++}| \le 1{,}96,$ то гипотезу однородности связанных выборок по критерию знаковых рангов Вилкоксона принимают, в противном случае отклоняют. Для другого уровня значимости применяют в качестве критического значения иной квантиль нормального распределения. Использование предельных теорем допустимо при достаточно больших объемах выборки.

Альтернативная гипотеза общего вида записывается как

$$H_{14} : H(-x_0) \ne 1 - H(x_0)$$

при некотором x_0. Таким образом, проверке подлежит гипотеза симметрии относительно 0, которую можно переписать в виде

$H(x) + H(-x) -1 = 0$.

Для построенной по выборке $Z_j = x_j - y_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, эмпирической функции распределения $H_n(x)$ последнее соотношение выполнено лишь приближенно:

$$H_n(x) + H_n(-x) - 1 \approx 0.$$

Как измерять отличие от 0? По тем же соображениям, что и в предыдущем пункте, целесообразно использовать статистику типа омега-квадрат. Соответствующий критерий был разработан нами в работе [206] на основе методов [367]. Он имеет вид

$$\omega_n^2 = \sum_{j=1}^{n} (H_n(Z_j) + H_n(-Z_j) - 1)^2.$$

В работе [206] найдено предельное распределение этой статистики:

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega_n^2 < x) = S_0(x).$$

В табл. 3.8 приведены критические значения статистики типа омега-квадрат для проверки симметрии распределения (рассчитаны Г.В. Мартыновым).

Как следует из табл. 3.8, правило принятия решений при проверке однородности связанных выборок в наиболее общей постановке и при уровне значимости 5% формулируется так. Вычислить статистику ω_n^2. Если $\omega_n^2 \leq 1{,}66$, то принять гипотезу однородности. В противном случае - отвергнуть.

Таблица 3.8

Критические значения статистики ω_n^2 для проверки симметрии

Значение функции распределения $S_0(x)$	Уровень значимости $\alpha = 1 - S_0(x)$	Критическое значение x статистики ω_n^2
0,90	0,10	1,20
0,95	0,05	1,66
0,99	0,01	2,80

В настоящем разделе затронута лишь небольшая часть непараметрических методов анализа числовых статистических данных. В частности, обратим внимание на непараметрические оценки плотности. В общем случае (в пространствах произвольной природы) они рассмотрены в главе 4.

Современная парадигма прикладной статистики. Выделяем парадигму математической статистики, сформировавшуюся к середине 1950-х годов, и сменяющую ее парадигму прикладной статистики. Для первой из них характерно внимание к различным параметрическим семействам распределений, упор на параметрические постановки задач оценивания и проверки гипотез, на теорию достаточных статистик, неравенство Рао-Крамера, метод максимального правдоподобия и сменивший его метод одношаговых оценок. При восстановлении зависимостей согласно старой парадигме характерной процедурой является проверка параметрических гипотез с использованием распределений Стьюдента и Фишера. Автор выполнил несколько научных исследований согласно парадигме математической статистики, в частности, подробно разработал методы оценивания параметров гамма-распределения при подготовке государственного стандарта ГОСТ 11.011-83 [56].

Однако необходим переход на новую парадигму [210], для которой характерен непараметрический подход, поскольку в подавляющем большинстве реальных ситуаций нет никаких оснований ожидать, что распределения результатов измерений, наблюдений, испытаний, анализов, опытов входят в какое-либо параметрическое семейство. Как хорошо известно, к настоящему времени непараметрические методы позволяют решать все те задачи, которые ранее решались параметрическими методами.

Из сказанного ясно, почему глава 3 посвящена непараметрическим статистическим методам, а свои исследования по параметрической статистике, в частности, по методу одношаговых оценок [210], автор не счел нужным включить в настоящее издание.

Глава 4. Разработка методов статистики объектов нечисловой природы

4.1. Использование объектов нечисловой природы при моделировании процессов управления

Статистика нечисловых данных, или статистика объектов нечисловой природы, нечисловая статистика, выделена нами как самостоятельная область прикладной статистики в 1979 г. [170].

Виды статистических данных. Статистические данные могут иметь различную природу. Исторически самыми ранними были два вида данных – сведения о числе объектов, удовлетворяющих тем или иным условиям, и числовые результаты измерений.

Существует много различных видов статистических данных. Это связано, в частности, со способами их получения. Если испытания некоторых технических устройств продолжаются до определенного момента, то получаем т.н. *цензурированные* данные, состоящие из набора чисел – продолжительностей работы ряда устройств до отказа, и информации о том, что остальные устройства продолжали работать в момент окончания испытания. Такие данные используются при оценке и контроле надежности.

Описание вида данных и, при необходимости, механизма их порождения – начало любого статистического исследования.

В простейшем случае статистические данные – это значения некоторого признака, свойственного изучаемым объектам. Значения могут быть количественными или представлять собой указание на категорию, к которой можно отнести объект. Во втором варианте говорят о качественном признаке.

При измерении по нескольким количественным или качественным признакам в качестве статистических данных об объекте получаем вектор.

Его можно рассматривать как новый вид данных. В таком случае выборка состоит из набора векторов. Есть часть координат – числа, а часть – качественные (категоризованные) данные, то говорим о векторе разнотипных данных.

Одним элементом выборки, т.е. одним измерением, может быть и функция в целом. Например, электрокардиограмма больного или амплитуда биений вала двигателя. Или временной ряд, описывающий динамику показателей определенной фирмы. Тогда выборка состоит из набора функций.

Элементами выборки могут быть и бинарные отношения. Например, при опросах экспертов часто используют упорядочения (ранжировки) объектов экспертизы – образцов продукции, инвестиционных проектов, вариантов управленческих решений. В зависимости от регламента экспертного исследования элементами выборки могут быть различные виды бинарных отношений (упорядочения, разбиения, толерантности), множества, нечеткие множества и т.д.

Итак, математическая природа элементов выборки в различных задачах прикладной статистики может быть самой разной. Однако можно выделить два класса статистических данных – числовые и нечисловые [351]. Соответственно прикладная статистика разбивается на две части – числовую статистику и нечисловую статистику (ее называют также статистикой нечисловых данных или статистикой объектов нечисловой природы).

Числовые статистические данные – это числа, вектора, функции. Их можно складывать, умножать на коэффициенты. Поэтому в числовой статистике большое значение имеют разнообразные суммы. Математический аппарат анализа сумм случайных элементов выборки – это (классические) законы больших чисел и центральные предельные теоремы.

Нечисловые статистические данные – это категоризованные данные, вектора разнотипных признаков, бинарные отношения, множества, нечеткие множества и др. Их нельзя складывать и умножать на коэффициенты. Поэтому не имеет смысла говорить о суммах нечисловых статистических данных. Они являются элементами нечисловых пространств (множеств). Математический аппарат анализа нечисловых статистических данных основан на использовании расстояний между элементами (а также мер близости, показателей различия) в таких пространствах. С помощью расстояний решаются основные статистические задачи - определяются эмпирические и теоретические средние, доказываются законы больших чисел, строятся непараметрические оценки плотности распределения вероятностей, решаются задачи диагностики и кластерного анализа, и т.д.

Итак, статистика нечисловых данных - это направление в прикладной математической статистике, в котором в качестве исходных статистических данных (результатов наблюдений) рассматриваются объекты нечисловой природы, т.е. объекты, которые нецелесообразно описывать числами, в частности элементы различных нелинейных пространств. Примерами являются бинарные отношения (ранжировки, разбиения, толерантности и др.), результаты парных и множественных сравнений, множества, нечеткие множества, измерения в шкалах, отличных от абсолютных. Этот перечень примеров не претендует на законченность. Он складывался постепенно, по мере того, как развивались теоретические исследования в области нечисловой статистики (статистики нечисловых данных) и расширялся опыт применений этого направления прикладной математической статистики [5].

Объекты нечисловой природы широко используются в теоретических и прикладных исследованиях по экономике, менеджменту и другим проблемам управления, в частности управления качеством продукции, в технических науках, социологии, психологии, медицине и т.д., а также практически во всех отраслях народного хозяйства. Рассмотрим основные виды объектов нечисловой природы.

Результаты измерений в шкалах, отличных от абсолютной. Обсудим конкретное исследование в области маркетинга образовательных услуг, послужившее поводом к развитию одного из направлений отечественных исследований по теории измерений. При изучении привлекательности различных профессий для выпускников новосибирских школ был составлен список из 30 профессий. Опрашиваемых просили оценить каждую из этих профессий одним из баллов 1, 2, ..., 10 по правилу: чем больше нравится, тем выше балл. В качестве единой оценки привлекательности определенной профессии для совокупности выпускников школ в работе [337] использовалось среднее арифметическое баллов, выставленных профессии опрошенными школьниками. В частности, физика получила средний балл 7,69, а математика - 7,50. Поскольку 7,69 больше, чем 7,50, был сделан вывод, что физика предпочтительнее математики.

Однако этот вывод противоречит данным работы [338], согласно которым ленинградские школьники средних классов больше любят математику, чем физику. Как объяснить это противоречие? Есть много подходов к выяснению причин различия выводов новосибирских и ленинградских исследователей. Здесь обсудим одно из возможных объяснений, основанное на идеях нечисловой статистики. Оно сводится к указанию на неадекватность (с точки зрения теории измерений) методики [337] обработки статистических данных о предпочтениях выпускников школ.

Баллы 1, 2, ..., 10 введены конкретными исследователями, т.е. субъективно. Если одна профессия оценена в 10 баллов, а вторая - в 2, то из этого нельзя заключить, что первая ровно в 5 раз привлекательней второй. Другой коллектив исследователей мог бы принять иную систему баллов, например 1, 4, 9, 16, ..., 100. Естественно предположить, что упорядочивание профессий по привлекательности, присущее школьникам, не зависит от того, какой системой баллов им предложит пользоваться специалист по маркетингу образовательных услуг. Раз так, то распределение профессий по градациям десятибалльной системы не изменится, если перейти к другой системе баллов с помощью любого допустимого преобразования в порядковой шкале, т.е. с помощью строго возрастающей функции $g: R^1 \to R^1$. Если $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ - ответы n выпускников школ, касающиеся математики, а $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ - физики, то после перехода к новой системе баллов ответы относительно математики будут иметь вид $g(Y_1), g(Y_2), \ldots, g(Y_n)$, а относительно физики - $g(Z_1), g(Z_2), \ldots, g(Z_n)$.

Пусть единая оценка привлекательности профессии вычисляется с помощью функции $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Какие требования естественно наложить на функцию $f: R^n \to R^1$, чтобы полученные с ее помощью выводы не зависели от того, какой именно системой баллов пользовался специалист по маркетингу образовательных услуг?

Замечание. Обсуждение можно вести в терминах экспертных оценок. Тогда, например, вместо сравнения математики и физики n экспертов оценивают по конкурентоспособности, например, две марки стали.

Единая оценка вычислялась для того, чтобы сравнивать профессии по привлекательности. Пусть $f(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ - среднее по Коши (см. раздел 4.3). Пусть среднее по первой совокупности меньше среднего по второй совокупности:

$f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) < f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$.

Тогда согласно теории измерений необходимо потребовать, чтобы для любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований в порядковой шкале было справедливо также неравенство

$f(g(Y_1), g(Y_2),\ldots,g(Y_n)) < f(g(Z_1), g(Z_2),\ldots,g(Z_n))$.

т.е. среднее преобразованных значений из первой совокупности также было меньше среднего преобразованных значений для второй совокупности. Более того, два рассматриваемых неравенства должны быть равносильны для любых двух совокупностей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ и $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ и любого допустимого преобразования. Средние величины, удовлетворяющие сформулированному условию, называют допустимыми (в порядковой шкале). Согласно теории измерений только такими средними можно пользоваться при анализе мнений выпускников школ или экспертов, обработке иных данных, измеренных в порядковой шкале.

Какие единые оценки привлекательности профессий $f(X_1, X_2, \ldots , X_n)$ устойчивы относительно сравнения? Ответ на этот вопрос дан в [170]. В частности, оказалось, что средним арифметическим, как в работе [337], пользоваться нельзя. А порядковыми статистиками, т.е. членами вариационного ряда (и только ими) - можно.

Методы анализа конкретных статистических данных, измеренных в шкалах, отличных от абсолютной, являются предметом изучения в статистике нечисловых данных. Основные шкалы измерения делятся на качественные (шкалы наименований и порядка) и количественные (шкалы интервалов, отношений, разностей, абсолютная). Методы анализа статистических данных в количественных шкалах сравнительно мало отличаются от таковых в абсолютной шкале. Добавляется только требование инвариантности относительно преобразований сдвига и/или масштаба. Методы анализа качественных данных - принципиально иные.

Исходным понятием теории измерений является совокупность $\Phi = \{\varphi\}$ допустимых преобразований шкалы (обычно Ф - группа), $\varphi : R^1 \to R^1$. Алгоритм обработки данных *W*, т.е. функция $W : R^n \to A$ (здесь *A* - множество возможных результатов работы алгоритма) называется адекватным в шкале с совокупностью допустимых преобразований Ф, если

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = W(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) \qquad (4.1)$$

для всех $x_i \in R^1,\ i = 1,2,\ldots,n$, и всех $\varphi \in \Phi$. Таким образом, теорию измерений рассматриваем как теорию инвариантов относительно различных совокупностей допустимых преобразований Ф. Интерес вызывают две задачи:

а) дана группа допустимых преобразований Ф (т.е. задана шкала измерения); какие алгоритмы анализа данных *W* из определенного класса являются адекватными (т.е удовлетворяют тождеству (4.1)) (частный случай проблемы А в общей схеме устойчивости)?

б) дан алгоритм анализа данных W; для каких шкал (т.е. групп допустимых преобразований Ф) он является адекватным (частный случай проблемы Б в общей схеме устойчивости)?

Ниже первая задача рассматривается для алгоритмов расчета средних величин. Информацию о других результатах решения задач указанных типов можно найти в работах [170, 305].

Бинарные отношения. Пусть $W : R^n \to A$ - адекватный алгоритм в шкале наименований. Можно показать, что этот алгоритм задается некоторой функцией от матрицы $B = \|b_{ij}\| = B(x_1, x_2, ..., x_n)$ порядка $n \times n$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i = x_j, i, j = 1,2,...,n, \\ 0, & x_i \neq x_j, i, j = 1,2,...,n. \end{cases}$$

Если $W : R^n \to A$ - адекватный алгоритм в шкале порядка, то этот алгоритм задается некоторой функцией от матрицы $C = \|c_{ij}\| = C(x_1, x_2, ..., x_n)$ порядка $n \times n$, где

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \leq x_j, i, j = 1,2,...,n, \\ 0, & x_i > x_j, i, j = 1,2,...,n. \end{cases}$$

Матрицы B и C можно проинтерпретировать в терминах бинарных отношений. Бинарное отношение A на конечном множестве $Q = \{q_1, q_2, ..., q_k\}$ - это подмножество *декартова квадрата* $Q^2 = \{(q_m, q_n), m, n = 1, 2, …, k\}$. Пара (q_m, q_n) входит в A тогда и только тогда, когда между q_m и q_n имеется рассматриваемое отношение.

Пусть некоторая характеристика измеряется у n объектов $q_1, q_2, …, q_n$, причем x_i - результат ее измерения у объекта q_i. Тогда матрицы B и C задают бинарные отношения на множестве объектов $Q = \{q_1, q_2, …, q_n\}$. Поскольку бинарное отношение можно рассматривать как подмножество декартова квадрата $Q \times Q$, то любой матрице $D = ||d_{ij}||$ порядка $n \times n$ из 0 и 1 соответствует бинарное отношение $R(D)$, определяемое следующим образом: $(q_i, q_j) \in R(D)$ тогда и только тогда, когда $d_{ij} = 1$.

Бинарное отношение $R(B)$ - отношение эквивалентности, т.е. симметричное рефлексивное транзитивное отношение. Оно задает разбиение Q на классы эквивалентности. Два объекта q_i и q_j входят в один класс эквивалентности тогда и только тогда, когда $x_i = x_j$, $b_{ij} = 1$.

Выше показано, как разбиения возникают в результате измерений в шкале наименований. Разбиения могут появляться и непосредственно. Так, при оценке качества промышленной продукции эксперты дают разбиение показателей качества на группы. Для изучения психологического состояния работников их просят разбить предъявленные рисунки на группы сходных между собой. Аналогичная методика применяется и в иных исследованиях, необходимых для оптимизации управления персоналом.

Во многих ЭММиМ разбиения получаются «на выходе» (например, в кластерном анализе) или же используются на промежуточных этапах анализа данных (например, сначала проводят классификацию, выделяя однородных групп, а затем в каждой группе строят регрессионную зависимость).

Бинарное отношение $R(C)$ задает разбиение Q на классы эквивалентности, между которыми введено отношение строгого порядка. Два объекта q_i и q_j входят в один класс тогда и только тогда, когда c_{ij}= 1 и c_{ji}= 1, т.е. $x_i = x_j$. Класс эквивалентности Q_1 предшествует классу эквивалентности Q_2 тогда и только тогда, когда для любых $q_i \in Q_1$, $q_j \in Q_2$ имеем $c_{ij} = 1$, c_{ji}= 0, т.е. $x_i < x_j$. Такое бинарное отношение в статистике называют ранжировкой со связями; связанными считаются объекты, входящие в один класс эквивалентности. В литературе встречаются и другие названия: линейный квазипорядок, упорядочение, квазисерия, ранжирование. Мы предпочитаем термин «кластеризованная ранжировка» [55, 200, 210]. Если каждый из классов эквивалентности состоит только из одного элемента, то имеем обычную ранжировку (другими словами, строгий линейный порядок).

Ранжировки возникают в результате измерений в порядковой шкале. Так, при описанном выше опросе ответ выпускника школы - это ранжировка (со связями) профессий по привлекательности. Ранжировки часто возникают и непосредственно, без промежуточного этапа - приписывания объектам квазичисловых оценок (баллов). Много примеров дано М. Кендэлом [89]. При оценке качества промышленной продукции ряд нормативных и методических документов предусматривают использование ранжировок.

Для прикладных областей, кроме ранжировок и разбиений, представляют интерес толерантности, т.е. рефлексивные симметричные бинарные отношения. Толерантность - математическая модель для выражения представлений о сходстве (похожести, близости). Разбиения - частный вид толерантностей. Толерантность, обладающая свойством транзитивности - это разбиение. Однако в общем случае толерантность не обязана быть транзитивной. Толерантности появляются в теории экспертных оценок, например, как результат парных сравнений (см. ниже).

Дихотомические* (*бинарные*) *данные. Это данные, которые могут принимать одно из двух значений (0 или 1), т.е. результаты измерений значений альтернативного признака. Измерения в шкале наименований и порядковой шкале приводят к бинарным отношениям, а те описываются как результаты измерений по нескольким альтернативным признакам, соответствующим элементам матриц $D = ||d_{ij}||$ из 0 и 1. . Дихотомические данные возникают в прикладных исследованиях и многими иными путями.

В настоящее время в большинстве технических регламентов, стандартов, технических условий, договоров на поставку конкретной продукции предусмотрен контроль по альтернативному признаку. Это означает, что единица продукции относится к одной из двух категорий - «годных» или «дефектных», т.е. соответствующих или не соответствующих требованиям стандарта. Основополагающими в этой области являются работы академика А.Н. Колмогорова. Подход советской вероятностно-статистической школы к проблемам контроля качества продукции отражен в монографиях [11, 124] (см. также главу 13 в [200]).

Дихотомические данные - давний объект математической статистики. Особенно большое применение они имеют в управленческих, экономических и социологических исследованиях, в которых большинство переменных, интересующих специалистов, измеряется по качественным шкалам. При этом дихотомические данные зачастую являются более адекватными, чем результаты измерений по методикам, использующим большее число градаций. В частности, психологические тесты типа MMPI используют только дихотомические данные. На них опираются и методы парных сравнений [66]. Элементарным актом в методе парных сравнений является предъявление эксперту для сравнения двух объектов (сравнение может проводиться также прибором). В одних постановках эксперт должен выбрать из двух объектов лучший по качеству, в других - ответить, похожи объекты или нет. В обоих случаях ответ эксперта можно выразить одной из двух цифр (меток) - 0 или 1. В первой постановке: 0, если лучшим объявлен первый объект; 1 - если второй. Во второй постановке: 0, если объекты похожи, схожи, близки; 1 - в противном случае.

Подводя итоги, можно сказать, что рассмотренные выше виды данные могут быть представлены в виде векторов из 0 и 1.

Множества. Совокупность X^n векторов $X = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$ из 0 и 1 размерности n находится во взаимно-однозначном соответствии с совокупностью 2^n всех подмножеств множества $N = \{1, 2, ..., n\}$. При этом вектору $X = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$ соответствует подмножество $N(X)\subseteq N$, состоящее из тех и только из тех i, для которых $x_i = 1$. Это объясняет, почему изложение вероятностных и статистических результатов, относящихся к анализу данных, являющихся объектами нечисловой природы перечисленных выше видов, можно вести на языке конечных случайных множеств [170].

Множества как исходные данные появляются и в иных постановках. Из геологических задач исходил Ж. Матерон, из электротехнических - Н.Н. Ляшенко и др. Случайные множества применялись для описания процесса случайного распространения, например распространения информации, слухов, эпидемии или пожара, а также в математической экономике. В [170] рассмотрены приложения случайных множеств в теории экспертных оценок и в теории управления запасами и ресурсами (логистике).

Объекты нечисловой природы как статистические данные. В теории и практике статистических методов наиболее распространенный объект изучения и применения - выборка $x_1, x_2,\ldots,x_n$, т.е. совокупность результатов n наблюдений (измерений, испытаний. анализов, опытов). В различных областях статистики результат наблюдения - это или число, или конечномерный вектор, или функция... Соответственно проводится, как уже отмечалось, деление прикладной статистики: одномерная статистика, многомерный статистический анализ, статистика временных рядов и случайных процессов... В нечисловой статистике (статистике нечисловых данных) в качестве результатов наблюдений рассматриваются объекты нечисловой природы.

Отметим необходимость развития методов статистической обработки «разнотипных данных», обусловленную большой ролью в прикладных исследованиях «признаков смешанной природы»: результат наблюдения состояния объекта зачастую представляет собой вектор, у которого часть координат измерена по шкале наименований, часть - по порядковой шкале, часть - по шкале интервалов и т.д. Есть и более сложные модели разнотипных данных, например, когда некоторые координаты вектора наблюдений описываются нечеткими множествами. Классические статистические методы ориентированы обычно либо на абсолютную шкалу, либо на шкалу наименований (анализ таблиц сопряженности), а потому зачастую непригодны для обработки разнотипных данных. Поэтому в статистике нечисловых данных разработаны новые методы анализа разнотипных данных.

С целью «стандартизации математических орудий» (выражение группы французских математиков, под псевдонимом Н. Бурбаки действовавшей в середине XX в.) целесообразно разрабатывать методы статистического анализа данных, пригодные одновременно для всех перечисленных выше видов результатов наблюдений. Кроме того, в процессе развития теоретических и прикладных исследований выявляется необходимость использования новых видов объектов нечисловой природы, отличных от рассмотренных выше, например, в связи с развитием статистических методов обработки текстовой информации. Поэтому целесообразно ввести еще один вид объектов нечисловой природы - объекты произвольной природы, т.е. элементы множеств, на которые не наложено никаких условий (кроме «условий регулярности», необходимых для справедливости доказываемых теорем). Другими словами, в этом случае предполагается, что результаты наблюдений (элементы выборки) лежат в произвольном пространстве X. Для получения теорем необходимо потребовать, чтобы X удовлетворяло тем или иным внутриматематическим условиям, например, было топологическим пространством. Ряд результатов классической математической статистики получен именно в такой постановке. Так, при изучении оценок максимального правдоподобия (ОМП) элементы выборки могут лежать в пространстве произвольной природы. Это не влияет на вывод свойств ОМП, поскольку в них рассматривается лишь зависимость плотности вероятности от параметра. Методы классификации, использующие лишь расстояние между классифицируемыми объектами, могут применяться к совокупностям объектов произвольной природы, лишь бы в пространстве, где они лежат, была задана метрика (или мера близости, показатель различия). Цель нечисловой статистики состоит в том, чтобы систематически рассматривать методы статистической обработки данных как произвольной природы, так и относящихся к указанным выше конкретным видам объектов нечисловой природы, т.е. методы описания данных, оценивания и проверки гипотез.

Объекты нечисловой природы при формировании модели реального явления. Использование объектов нечисловой природы часто порождено желанием обрабатывать более объективную, более освобожденную от погрешностей информацию. Как показали многочисленные опыты, человек более правильно (и с меньшими затруднениями) отвечает на вопросы качественного, например сравнительного, характера, чем количественного. Так, ему легче сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их примерный вес в граммах. Другими словами, использование объектов нечисловой природы - средство повысить устойчивость эконометрических и экономико-математических моделей реальных явлений по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей.

Обсуждение начнем со шкал измерения. Методы обработки данных должны быть адекватны относительно допустимых преобразований шкал измерения в смысле репрезентативной теории измерений. Однако установление типа шкалы, т.е. задание группы преобразований Φ - дело специалиста соответствующей прикладной области. Так, оценки привлекательности профессий мы считали измеренными в порядковой шкале [170]. Однако отдельные социологи не соглашались с этим, считая, что выпускники школ пользуются шкалой с более узкой группой допустимых преобразований, например, интервальной шкалой. Очевидно, эта проблема относится не к математике, а к наукам о человеке. Для ее решения может быть поставлен достаточно трудоемкий эксперимент.

Необходимость использования в математических моделях реальных явлений таких объектов нечисловой природы, как бинарные отношения, множества, нечеткие множества, кратко была показана выше. Здесь же обратим внимание, что анализируемые в классической статистике результаты наблюдений также «не совсем числа». А именно, любая величина X измеряется всегда с некоторой погрешностью ΔX и результатом наблюдения является $Y = X + \Delta X$. Погрешностями измерений занимается метрология. Отметим справедливость следующих фактов (в вероятностно-статистической модели процесса измерения):

а) для большинства реальных измерений невозможно полностью исключить систематическую ошибку, т.е. $M(\Delta X) \neq 0$;

б) распределение ΔX в подавляющем большинстве случаев не является нормальным (см. [200] и главу 3 выше);

в) измеряемую величину X и погрешность ее измерения ΔX обычно нельзя считать независимыми случайными величинами;

г) распределение погрешностей оценивается по результатам специально проведенных измерений, следовательно, полностью известным считать его нельзя; зачастую исследователь располагает лишь границами для систематической погрешности и оценками таких характеристик случайной погрешности, как дисперсия или размах.

Приведенные факты показывают ограниченность области применимости распространенной модели погрешностей, в которой X и ΔX рассматриваются как независимые случайные величины, причем ΔX имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием.

Погрешности ΔX можно учитывать либо с помощью вероятностной модели (ΔX - случайная величина, имеющая функцию распределения, вообще говоря, зависящую от X), либо с помощью нечетких множеств. Во втором случае приходим к теории нечетких чисел и к ее частному случаю - статистике интервальных данных [210, 213].

Другой источник появления погрешности ΔX связан с принятой в конструкторской и технологической документации системой допусков на контролируемые параметры изделий и деталей, с использованием шаблонов при проверке контроля качества продукции [164]. В этих случаях характеристики ΔX определяются не свойствами средств измерения, а применяемой технологией проектирования и производства. В терминах прикладной статистики сказанному соответствует группировка данных, при которой мы знаем, какому из заданных интервалов принадлежит наблюдение, но не знаем точного значения результата наблюдения. Применение группировки может дать экономический эффект, поскольку зачастую легче установить, к какому интервалу относится результат наблюдения, чем точно измерить его.

Объекты нечисловой природы как результат статистической обработки данных. Объекты нечисловой природы появляются не только на «входе» статистической процедуры, но и в процессе обработки данных, и на «выходе» в качестве итога статистического анализа.

Рассмотрим задачу парной регрессии Исходные данные имеют вид $(x_i, y_i) \in R^2,\ i = 1,2,...,n$. Надо с достаточной точностью описать y как многочлен (полином) от x, т.е. модель имеет вид

$$y_i = \sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,...,n, \tag{4.2}$$

где m - неизвестная степень полинома; $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ - неизвестные коэффициенты многочлена; $\varepsilon_i,\ i = 1,2,...,n$, - погрешности, которые для простоты примем независимыми и имеющими одно и то же нормальное распределение.

Здесь наглядно проявляется одна из причин живучести статистических моделей на основе нормального распределения. Такие модели, хотя и, как правило, не адекватны реальной ситуации [200], но с математической точки зрения позволяет проникнуть глубже в суть изучаемого явления. Поэтому они пригодны для первоначального анализа ситуации, как и в рассматриваемом случае. Дальнейшие научные исследования должны быть направлены на снятие нереалистического предположения нормальности и переход к непараметрическим моделям погрешности.

Распространенная процедура восстановления зависимости с помощью многочлена такова: сначала пытаются применить модель (2) для линейной функции (m = 1), при неудаче (неадекватности модели) переходят к многочлену второго порядка (m = 2), если снова неудача, то берут модель (2) с m= 3 и т.д. (адекватность модели проверяют по F-критерию Фишера).

Обсудим свойства этой процедуры в терминах прикладной статистики. Если степень полинома задана ($m = m_0$), то его коэффициенты оценивают методом наименьших квадратов, свойства этих оценок хорошо известны [85, гл.26]. Однако в описанной выше постановке m тоже является неизвестным параметром и подлежит оценке. Требуется оценить объект (m, a_0, a_1, a_2, …, a_m), множество значений которого можно описать как $\bigcup_{m=0}^{+\infty} R^{m+1} = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$. Это - объект нечисловой природы, обычные методы оценивания для него неприменимы, так как m - дискретный параметр. В рассматриваемой постановке разработанные к настоящему времени методы оценивания степени полинома носят в основном эвристический характер (см., например, гл. 12 монографии [282]). Нами доказано [200, гл.3], что обычно используемыми методами степень полинома m оценивается несостоятельно, и найдено предельное распределение оценок этого параметра, оказавшееся геометрическим. Отметим, что для степени многочлена нами предложены состоятельные оценки [200].

В модели линейной регрессии данные имеют вид $(y_i, X_i),\ i = 1,2,...,n$, где $X_i = (x_{i1}, x_{i2},..., x_{iN}) \in R^N$ - вектор предикторов, а модель такова:

$$y_i = \sum_{j \in K} a_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,...,n \tag{4.3}$$

(здесь K - некоторое подмножество множества {1, 2, …, n}; ε_i - те же, что и в модели (4.2); a_j - неизвестные коэффициенты при предикторах с номерами из K). Модель (4.2) сводится к модели (4.3), если

$x_{i1} = 1,\ x_{i2} = x_i,\ x_{i3} = x_i^2,\ x_{i4} = x_i^3, ..., x_{ij} = x_i^{j-1}, ...$

В модели (4.2) есть естественный порядок ввода предикторов в рассмотрение - в соответствии с возрастанием степени, а в модели (4.3) естественного порядка нет. Есть только частичный порядок - чем мощность подмножества меньше, тем лучше. Модель (4.3) актуальна в организационно-экономических и технических исследованиях (см. многочисленные примеры в журнале «Заводская лаборатория»). Она применяется, когда из большого числа факторов, предположительно влияющих на изучаемую переменную, надо отобрать по возможности наименьшее число значимых факторов и с их помощью сконструировать прогнозирующую формулу (4.3).

Задача оценивания в модели (4.3) разбивается на две последовательные задачи: оценивание K - подмножества множества всех предикторов, а затем - неизвестных параметров a_j. Методы решения второй задачи хорошо известны. Хуже обстоит дело с оцениванием объекта нечисловой природы K. Понятие состоятельности в данном случае требует специального определения. Пусть K_0 - истинное подмножество предикторов, т.е. подмножество, для которого справедлива модель (4.3), а подмножество предикторов K_n - его оценка. Оценка K_n называется состоятельной, если

$$\lim_{n \to \infty} Card(K_n \Delta K_0) = 0,$$

где Δ - символ симметрической разности множеств; $Card(K)$ означает число элементов множества K, а предел - в смысле сходимости по вероятности.

Итак, задача оценивания в моделях регрессии разбивается на две - оценивание структуры модели и оценивание параметров при заданной структуре. В модели (4.2) структура описывается неотрицательным целым числом m, в модели (4.3) - множеством K. Структура - объект нечисловой природы. Такова же ситуация и в других методах многомерного статистического анализа - в факторном анализе (включая метод главных компонент) и в многомерном шкалировании, в иных оптимизационных постановках проблем прикладного многомерного статистического анализа.

Примеры объектов нечисловой природы на «выходе» статистической процедуры многочисленны. Разбиения - итог работы многих алгоритмов классификации, в частности, алгоритмов кластер-анализа. Ранжировки - результат упорядочения профессий по привлекательности или автоматизированной обработки мнений экспертов - членов комиссии по подведению итогов конкурса научных работ. (В последнем случае используются кластеризованные ранжировки; так, в одну группу, наиболее многочисленную, попадают работы, не получившие наград.) Из всех объектов нечисловой природы, видимо, наиболее часты на «выходе» дихотомические данные - принять или не принять гипотезу, в частности, принять или забраковать партию продукции. Результатом статистической обработки данных может быть множество, например зона наибольшего поражения при аварии, или последовательность множеств, например, «среднемерное» описание динамики пожара (см. гл.4 в [170]).

Неопределенность реальных явлений и процессов описывают с помощью математического аппарата теории нечеткости [171]. Нечетким множеством французский математик Э. Борель еще в начале XX в. предлагал описывать представление людей о числе зерен, образующем «кучу». С помощью нечетких множеств формализуются значения лингвистических переменных, выступающих как итоговая оценка качества систем автоматизированного проектирования, сельскохозяйственных машин, бытовых газовых плит, надежности программного обеспечения или систем управления.

Можно констатировать, что все виды объектов нечисловой природы могут появляться как «на входе», так и «на выходе» организационно-экономического исследования.

Вероятностные модели порождения нечисловых данных. Рассмотрим базовую вероятностную модель дихотомических данных - *бернуллиевский вектор* (в терминологии [31] - *люсиан*), т.е. конечную последовательность $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ независимых испытаний Бернулли X_i, для которых $P(X_i = 1) = p_i$ и $P(X_i = 0) = p_i$, $i = 1,2,...,k,$ причем вероятности p_i могут быть различны.

Бернуллиевские вектора часто применяются в ЭММиМ. Так, они использованы в [170] для описания равномерно распределенных случайных толерантностей. Толерантность на множестве из m элементов задают симметричной матрицей $\|\delta_{ij}\|$ из 0 и 1, на главной диагонали которой стоят 1. Случайная толерантность описывается распределением $m(m$-$1)/2$ дихотомических случайных величин δ_{ij}, $1 \le i < j \le m,$ а для равномерно распределенной (на множестве всех толерантностей) толерантности эти случайные величины являются независимыми и принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями 1/2. Записав элементы δ_{ij} задающей такую толерантность матрицы в строку, получим бернуллиевский вектор с k=$m(m$-$1)/2$ и p_i = 1/2, $i = 1,2,...,k.$

В связи с оцениванием по статистическим данным функции принадлежности нечеткой толерантности в 70-е годы была построена теория случайных толерантностей с такими независимыми δ_{ij}, что вероятности $P(\delta_{ij} = 1) = p_{ij}$ произвольны [170]. Случайные множества с независимыми элементами использовались как общий язык для описания парных сравнений и случайных толерантностей. В некоторых публикациях термин «люсиан» применялся как сокращение для выражения «случайные множества с независимыми элементами».

Распределение бернуллиевского вектора X полностью описывается векторным параметром $P = (p_1, p_2, ..., p_k)$, т.е. нечетким подмножеством множества {1, 2, ..., k}. Действительно, для любого детерминированного вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ из 0 и 1 имеем

$$P(X = x) = \prod_{1 \le j \le k} h(x_j, p_j),$$

где $h(x, p)=p$ при $x = 1$ и $h(x, p)=1 - p$ при $x=0$.

Бернуллиевскими векторами можно моделировать:

- результаты статистического контроля (0 - годное изделие, 1 - дефектное);

- результаты маркетинговых и социологических опросов (0 - опрашиваемый выбрал первую из двух подсказок, 1 - вторую);

- распределение посторонних включений в материале (0 - нет включения в определенном объеме материала, 1 - есть);

- результаты испытаний и анализов (0 - нет нарушений требований нормативно-технической документации, 1 - есть такие нарушения);

- результаты аудита [334] (0 – нет нарушений нормативных требовании в конкретном документе бухгалтерского учета, 1 – обнаружено хотя бы одно нарушение);

- процессы распространения, например, пожаров (0 - нет загорания, 1 - есть; подробнее см. [170, с.215-223]);

- состояние технологического процесса (0 - процесс находится в границах допуска, 1 - вышел из них);

- ответы экспертов (опрашиваемых) о сходстве объектов (проектов, образцов), и т.д.

Парные сравнения. В книге Г.Т. Фехнера «Элементы психофизики» (1860) широко применялся предложенный им метод парных сравнений [66, с.14-16]. Общую модель парных сравнений опишем согласно монографии Г. Дэвида [66, с.9]. Пусть t объектов $A_1, A_2, ..., A_t$ сравниваются попарно каждым из n экспертов. Всего возможных пар для сравнения имеется $s = t(t-1)/2.$ Эксперт с номером γ делает r_γ повторных сравнений для каждой из s возможностей. Пусть $X(i, j, \gamma, \delta)$, i, j=1, 2, ..., t, $i \neq j$, γ=1, 2, ..., n; δ=1, 2, ..., r_γ, - случайная величина, принимающая значение 1 или 0 в зависимости от того, предпочитает ли эксперт с номером γ объект A_i или объект A_j в δ-м сравнении двух объектов. Предполагается, что все сравнения проводятся независимо друг от друга, так что случайные величины $X(i, j, \gamma, \delta)$ независимы в совокупности, если не считать того, что $X(i, j, \gamma, \delta) + X(j, i, \gamma, \delta) = 1$. Положим

$$P(X(i, j, \gamma, \delta) = 1) = \pi(i, j, \gamma, \delta).$$

Модель парных сравнений представляет собой частный случай бернуллиевского вектора. Число наблюдений равно числу неизвестных параметров, поэтому для получения статистических выводов необходимо наложить априорные условия на вероятности $\pi(i, j, \gamma, \delta)$, например, как в [66, с.9]:

$\pi(i, j, \gamma, \delta) = \pi(i, j, \gamma)$ (нет эффекта от повторений);

$\pi(i, j, \gamma, \delta) = \pi(i, j)$ (нет эффекта от повторений и от экспертов).

Теорию независимых парных сравнений целесообразно разделить на две части - непараметрическую, в которой статистические задачи ставятся непосредственно в терминах $\pi(i, j, \gamma, \delta)$, и параметрическую, в которой вероятности $\pi(i, j, \gamma, \delta)$ выражаются через меньшее число иных параметров. Ряд результатов непараметрической теории парных сравнений (см., например, [210, гл.11]) непосредственно вытекает из теории люсианов.

В параметрической теории парных сравнений наиболее популярна линейная модель [66, с.11], в которой предполагается, что каждому объекту A_i можно сопоставить некоторую «ценность» V_i так, что вероятность предпочтения $\pi(i, j)$ (т.е. предполагается дополнительно, что эффект от повторений и от экспертов отсутствует) выражается следующим образом:

$$\pi(i, j) = H(V_i - V_j), \qquad (4.4)$$

где $H(x)$ - функция распределения, симметричная относительно 0, т.е.

$$H(-x) = 1 - H(x) \qquad (4.5)$$

при всех x (методы проверки справедливости (4.5) рассмотрены в разд. 3.3).

Широко применяются модели Терстоуна - Мостеллера и Брэдли - Терри, в которых $H(x)$ - функции нормального и логистического распределений соответственно. Поскольку функция $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1 и функция

$$\Psi(x) = e^x (1 + e^x)^{-1}$$

стандартного логистического распределения удовлетворяют соотношению

$$\sup_{x \in R^1} |\Phi(x) - \Psi(1{,}7x)| < 0{,}01,$$

то для обоснованного выбора по статистическим данным между этими моделями необходимо не менее 1000 наблюдений [200, гл.4].

Соотношение (4.4) вытекает из следующей модели поведения эксперта: он измеряет «ценность» V_i и V_j объектов A_i и A_j, но с ошибками ε_i и ε_j соответственно, а затем сравнивает свои оценки ценности объектов $y_i = V_i + \varepsilon_i$ и $y_j = V_j + \varepsilon_j$. Если $y_i > y_j$, то он предпочитает A_i, в противном случае - A_j. Тогда

$$\pi(i, j) = P(\varepsilon_i - \varepsilon_j < V_i - V_j) = H(V_i - V_j). \qquad (4.6)$$

Обычно предполагают, что субъективные ошибки эксперта ε_i и ε_j независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение. Тогда функция распределения $H(x)$ из соотношения (4.6) непрерывна и удовлетворяет функциональному уравнению (4.5).

Существует много разновидностей моделей парных сравнений, постоянно предполагаются новые. В качестве примера опишем новую модель парных сравнений, основанную не на процедуре упорядочения, а на определении сходства объектов. Пусть каждому объекту A_i соответствует точка a_i в r-мерном евклидовом пространстве R^r. Эксперт «измеряет» a_i и a_j с ошибками ε_i и ε_j соответственно и в случае, если евклидово расстояние между $a_i + \varepsilon_i$ и $a_j + \varepsilon_j$ меньше 1, заявляет о сходстве объектов A_i и A_j, в противном случае - об их различии. Предполагается, что ошибки ε_i и ε_j независимы и имеют одно и то же распределение, например, круговое нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией координат σ^2. Целью статистической обработки является определение по результатам парных сравнений оценок параметров a_1, a_2, … ,a_r, и σ^2, а также проверка согласия опытных данных с моделью.

Рассмотренные модели парных сравнений могут быть обобщены. Вводят понятие «ничья» - ситуации, когда эксперт оценивает объекты одинаково. Модели с учетом «ничьих» предполагают, что эксперт может отказаться от выбора одного из объектов и заявить об их эквивалентности, т.е. число возможных ответов увеличивается с 2 до 3. В моделях множественных сравнений эксперту представляется не два объекта, а три или большее число.

Модели, учитывающие «ничьи», строятся обычно с помощью используемых в психофизике «порогов чувствительности»: если $| y_i - y_j |\leq r$ (где r - порог чувствительности), то объекты A_i и A_j эксперт объявляет неразличимыми. Приведем пример модели с «ничьими», основанной на другом принципе. Пусть каждому объекту A_i соответствует точка a_i в r-мерном линейном пространстве. Как и прежде, эксперт «измеряет» «объектные точки» a_i и a_j с ошибками ε_i и ε_j соответственно, т.е. принимает решение на основе $y_i = a_i + \varepsilon_i$ и $y_j = a_j + \varepsilon_j$. Если все координаты y_i больше соответствующих координат y_j, то A_i предпочитается A_j. Соответственно, если каждая координата y_i меньше координаты y_j с тем же номером, то эксперт считает наилучшим объект A_j. Во всех остальных случаях эксперт объявляет о ничейной ситуации. Эта модель при $r = 1$ переходит в линейную модель. Она связана с принципом Парето в теории группового выбора и предусматривает выбор оптимального по Парето объекта, если он существует (роль согласуемых критериев играют процедуры сравнения значений отдельных координат), и отказ от выбора, если такого объекта нет.

Можно строить модели, учитывающие порядок предъявления объектов при сравнении, зависимость результата сравнения от результатов предшествующих сравнений. Опишем одну из подобных моделей.

Пусть эксперт сравнивает три объекта - *A, B, C,* причем сначала сравниваются *A* и *B*, потом - *B* и *C* и, наконец, *A* и *C*. Для определенности пусть $A > B$ будет означать, что *A* более предпочтителен, чем *B*. Пусть при предъявлении двух объектов

$$P(A > B) = \pi_{AB}, P(B > C) = \pi_{BC}, P(A > C) = \pi_{AC}.$$

Теперь пусть пара *B, C* предъявляется после пары *A, B*. Естественно предположить, что высокая оценка *B* в первом сравнении повышает вероятность предпочтения *B* и во втором, и, наоборот, отрицательное мнение о *B* в первом сравнении сохраняется и при проведении второго сравнения. Это предположение проще всего учесть в модели следующим образом:

$$P(B > C \mid B > A) = \pi_{BC} + \delta, \quad P(B > C \mid A > B) = \pi_{BC} - \delta,$$

где δ - некоторое положительное число, показывающее степень влияния первого сравнения на второе. По аналогичным причинам вероятности исхода третьего сравнения в зависимости от результатов первых двух можно описать так:

$$P(A > C \mid A > B, B > C) = \pi_{AC} + 2\delta, \quad P(A > C \mid A > B, B < C) = \pi_{AC},$$
$$P(A > C \mid A < B, B > C) = \pi_{AC}, \quad P(A > C \mid A < B, B < C) = \pi_{AC} - 2\delta.$$

Статистическая задача состоит в определении параметров π_{AB}, π_{BC}, π_{AC} и δ по результатам сравнений, проведенных *n* экспертами, и в проверке адекватности модели. Можно рассматривать и другие модели, в частности, учитывающие тягу экспертов к транзитивности ответов.

Оценки параметров приведенных выше моделей находятся обычно методом максимального правдоподобия или асимптотически эквивалентным ему методом одношаговых оценок [210, гл.6], а проверка согласия проводится по критерию отношения правдоподобия или асимптотически эквивалентными ему критериями типа хи-квадрат [66]. Отметим некоторые сложности при обосновании возможности использовании линейных моделей типа (4.4) - (4.6). Вероятностно-статистическая теория достаточно проста, когда предполагается, что каждому отдельному сравнению двух объектов соответствуют свои собственные ошибки экспертов, причем все ошибки независимы в совокупности. Однако это предположение отнюдь не очевидно с содержательной точки зрения. В качестве примера рассмотрим три объекта *A, B* и *C*, которые сравнивают попарно: *A* и *B*, *B* и *C*, *A* и *C*. В соответствии со сказанным, в рассмотрение вводят 6 ошибок одного и того же эксперта: ε_A и ε_B в первом сравнении, ε_B' и ε_C-во втором, ε_A' и ε_C'- в третьем, причем все эти 6 случайных величин независимы в совокупности. Между тем естественно думать, что мнения эксперта об одном и том же объекте связаны между собой. Т.е. ε_A и ε_A' зависимы, равно как ε_B и ε_B', а также ε_C и ε_C'. Более того, если принять, что точка зрения эксперта полностью определена для него самого, то следует положить $\varepsilon_A = \varepsilon_A'$ и соответственно $\varepsilon_B = \varepsilon_B'$ и $\varepsilon_C = \varepsilon_C'$. При этом случайные величины ε_A, ε_B и др. интерпретируется как отклонения мнений отдельных экспертов от истины. В этой модели ошибку эксперта целесообразно считать состоящей из двух слагаемых, а именно: отклонения от истины, вызванного внутренними особенностями эксперта (систематическая погрешность) и колебания мнения эксперта в связи с очередным парным сравнением (случайная погрешность). Игнорирование систематической погрешности облегчает развитие теории, а ее учет приводит к необходимости изучения зависимых парных сравнений.

При обработке результатов парных сравнений первый этап - проверка согласованности. Понятие согласованности уточняется различными способами, но все они имеют один и тот же смысл проверки однородности обрабатываемого материала, т.е. того, что целесообразно агрегировать мнения отдельных экспертов, объединить данные и совместно их обрабатывать. При отсутствии однородности данные разбиваются на группы (классы, кластеры, таксоны) с целью обеспечения однородности внутри отдельных групп. Естественно, согласованность целесообразно проверять, вводя возможно меньше гипотез о структуре данных. Следовательно, целесообразно пользоваться для этого непараметрической теорией парных сравнений, основанной на теории бернуллиевских векторов.

Модели парных сравнений с успехом применяются в экспертных и экспериментальных процедурах упорядочивания и выбора. В частности, для анализа голосований, турниров, выбора наилучшего объекта (проекта, образца, кандидатуры); в планировании и анализе сравнительных экспериментов и испытаний; в органолептической экспертизе (в частности, дегустации); при изучении поведения потребителей; визуальной колоритмии (принятии решений на основе цвета), определении индивидуальных рейтингов и вообще изучении предпочтений при выборе и т. д. ([66, 170]).

Бинарные отношения. Еще в начале XX в. был развит один из первых разделов непараметрической статистики - теория ранговой корреляции. Ее можно рассматривать как теорию статистического анализа случайных ранжировок, равномерно распределенных на множестве всех ранжировок. Так, при обработке данных классического психофизического эксперимента по упорядочению кубиков соответственно их весу, подробно описанного в работе [307], оказалась адекватной следующая т.н. *T*-модель ранжирования.

Пусть имеется t объектов $A_1, A_2, ..., A_t$, причем каждому объекту A_i соответствует число a_i, описывающее его положение на шкале изучаемого признака. Испытуемый упорядочивает объекты так, как если бы оценивал соответствующие им значения с ошибками, т.е. находил $y_i = a_i + \varepsilon_i$, i=1, 2,

…, *n,* где ε_i - ошибка при рассмотрении *i*-го объекта, а затем располагал бы объекты в том порядке, в каком располагаются $y_1, y_2,..., y_t$. В этом случае вероятность появления упорядочения $A_{i1}, A_{i2},...A_{it}$ есть $P(y_{i1} < y_{i2} < ... < y_{it}),$ а ранги $R_1, R_2,...R_t$ объектов являются рангами случайных величин $y_1, y_2,..., y_t$, полученными при их упорядочении в порядке возрастания. Кроме того, для простоты расчетов в модели предполагается, что ошибки испытуемого $\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_t$ независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2.

Поскольку бинарное отношение на множестве из *t* элементов полностью описывается матрицей из 0 и 1 порядка $t \times t$, то задать распределение случайного бинарного отношения - это то же самое, что задать распределение вероятностей на множестве всех матриц описанного вида, состоящем из $2^{(t^2)}$ элементов. Пространства ранжировок, разбиений, толерантностей зачастую удобно считать подпространствами пространства всех бинарных отношений, тогда распределения вероятностей на них - частные случаи описанного выше распределения, выделенные тем, что вероятности принадлежности случайного бинарного отношения соответствующим подпространствам равны 1. Распределение произвольного бинарного отношения описывается $2^{(t^2)}$-1 параметрами, распределение случайной ранжировки (без связей) - (*t!* - 1) параметрами, а описанная выше *Т*-модель ранжирования задается (*t* + 1) параметром. При *t* = 4 эти числа равны соответственно 65535, 23 и 5. Первое из этих чисел показывает сложность, а иногда и невозможность использования произвольных бинарных отношений в предназначенных для практического использования вероятностно-статистических моделях, поскольку по имеющимся данным невозможно оценить столь большое число параметров. Приходится ограничиваться теми или иными семействами бинарных отношений - ранжировками, разбиениями, толерантностями и др. Модель произвольной случайной ранжировки при t = 5 описывается 119 параметрами, при t = 6 - уже 719 параметрами, при t = 7 число параметром достигает 5049, что уже явно за пределами возможности оценивания. В то же время T-модель ранжирования при t = 7 описывается всего 8-ю параметрами, а потому может быть кандидатом для практического использования.

Что естественно ввести в модель относительно распределения случайного элемента со значениями в том или ином пространстве бинарных отношений? Зачастую целесообразно считать, что распределение имеет некий центр, попадание в который наиболее вероятно, а по мере удаления от центра вероятности убывают. Это соответствует естественной модели измерения с ошибкой. В одномерном случае результат подобного измерения описывается унимодальной симметричной плотностью. Чтобы ввести понятие монотонного распределения в пространстве бинарных отношений, будем исходить из метрики в этом пространстве. Воспользовавшись тем, что бинарные отношения C и D однозначно описываются матрицами $\| c_{ij} \|$ и $\| d_{ij} \|$ порядка $t \times t$, рассмотрим расстояние (в несколько другой терминологии - метрику) в пространстве бинарных отношений

$$d(C,D) = \sum_{1\le i,j\le t} | c_{ij} - d_{ij} |. \qquad (4.7)$$

Метрика (4.7) в различных пространствах бинарных отношений - ранжировок, разбиений, толерантностей - может быть введена с помощью соответствующих систем аксиом [210]). В настоящее время метрику (4.7) обычно называют расстоянием Кемени в честь американского исследователя Джона Кемени, впервые получившего эту метрику исходя из предложенной им системы аксиом для расстояния между упорядочениями (ранжировками).

В статистике нечисловых данных применяются и иные метрики, отличающиеся от расстояния Кемени. Для использования понятия монотонного распределения нет необходимости требовать выполнения неравенства треугольника, а достаточно, чтобы $d(C,D)$ можно было рассматривать как показатель различия. Под показателем различия понимаем такую функцию $d(C, D)$ бинарных отношений C и D, что $d(C, D) = 0$ при $C = D$ и увеличение $d(C, D)$ соответствует возрастанию различия между C и D.

Определение 1. Распределение бинарного отношения X называется монотонным с центром в C_0 относительно расстояния (показателя различия) d, если из $d(C, C_0) < d(D, C_0)$ следует, что $P(X = C) > P(X = D)$.

Это определение впервые введено в [170, с.196]. Оно может использоваться в любых пространствах бинарных отношений и, более того, в любых пространствах из конечного числа элементов, лишь бы в них была введена функция $d(C, D)$ - показатель различия элементов C и D этого пространства. Монотонное распределение унимодально, мода находится в C_0.

Определение 2. Распределение бинарного отношения X называется симметричным относительно расстояния d с центром в C_0, если существует такая функция $f : R_+^1 \to [0,1]$, что

$$P(X = C) = f(d(C, C_0)). \qquad (4.8)$$

Если распределение X монотонно и таково, что из $d(C, C_0) = d(D, C_0)$ следует $P(X = C) = P(X = D)$, то оно симметрично. Если функция f в (4.8) монотонно строго убывает, то соответствующее распределение монотонно в смысле определения 1.

Поскольку толерантность на множестве из t элементов задается $0,5t(t - 1)$ элементами матрицы из 0 и 1 порядка $t \times t$, лежащими выше главной диагонали, то всего толерантностей имеется $2^{0,5t(t-1)}$, а потому распределение на множестве толерантностей задается в общем случае $2^{0,5t(t-1)}$-1 параметрами. Семейство распределений, соответствующее независимым элементам матрицы, задается бернуллиевским вектором (люсианом) с $0,5t(t - 1)$ параметрами. Математическая техника, необходимая для изучения толерантностей с независимыми элементами, существенно проще, чем в случае ранжировок и разбиений. Здесь легко отказаться от условия равномерности распределения. Этому условию соответствует $p_{ij} \equiv 1/2$, в то время как статистические методы анализа люсианов, развитые в нечисловой статистике [170, 200, 210], не налагают существенных ограничений на p_{ij} .

Если мнения экспертов описываются монотонными распределениями, то для согласованности необходимо совпадение центров этих распределений. Методы проверки согласованности для ранжировок, основанные на коэффициентах ранговой корреляции и конкордации, позволяют лишь отвергнуть гипотезу о равнораспределенности. Но не установить, можно ли считать, что центры соответствующих экспертам распределений совпадают, или же, например, существует две группы экспертов, каждая со своим центром. Теория случайных толерантностей лишена этого недостатка. Отсюда вытекают следующие практические рекомендации.

Пусть цель обработки экспертных данных состоит в получении ранжировки, отражающей групповое мнение. Однако согласно рекомендуемой процедуре экспертного опроса пусть эксперты не упорядочивают объекты, а проводят парные сравнения, сравнивая каждый из рассматриваемых объектов со всеми остальными, причем ровно один раз. Тогда ответ эксперта – квазитолерантность (рефлексивное антисимметричное отношение), но, вообще говоря, не ранжировка, поскольку в ответах эксперта может нарушаться транзитивность.

Возможны два пути обработки данных. Первый - превратить ответ эксперта в ранжировку (тем или иным способом «спроектировав» его на пространство ранжировок), а затем проверять согласованность ранжировок с помощью известных критериев. При этом от квазитолерантности перейти к ранжировке можно, например, так. Будем выбирать ближайшую (в смысле применяемого расстояния) матрицу к матрице ответов эксперта из всех, соответствующих ранжировкам без связей.

Второй путь - проверить согласованность случайных толерантностей, а групповое мнение искать с помощью медианы Кемени (подробнее см. ниже) непосредственно по исходным данным, т.е. по толерантностям. Групповое мнение при этом может быть найдено в пространстве ранжировок. Второй путь мы считаем более предпочтительным, поскольку при этом обеспечивается более адекватная проверка согласованности и исключается процедура укладывания мнения эксперта в «прокрустово ложе» ранжировки.

Области применения статистики бинарных отношений многообразны: ранговая корреляция - оценка величины связи между переменными, измеренными в порядковой шкале; анализ экспертных или экспериментальных упорядочений; анализ разбиений технико-экономических показателей на группы сходных между собой; обработка данных о сходстве (взаимозаменяемости); статистический анализ классификаций; математические вопросы теории менеджмента и др.

Случайные множества. Если Q состоит из конечного числа элементов, то считаем, что случайное подмножество S - это случайный элемент со значениями в 2^Q - множестве всех подмножеств множества Q, состоящем из $2^{card(Q)}$ элементов. Считаем, что все подмножества Q измеримы. Тогда распределение случайного подмножества $S = S(\omega)$ множества Q - это

$$P_S(A) = P(S = A) = \mathrm{P}(\{\omega : S(\omega) = A\}), A \subseteq Q. \qquad (4.9)$$

В (4.9) предполагается, что $S : \Omega \to 2^Q$, где (Ω, F, P) - вероятностное пространство, на котором определен случайный элемент $S(\omega)$. (Здесь Ω - пространство элементарных событий, F - σ-алгебра случайных событий, P - вероятностная мера на F.) Через распределение $P_S(A)$ выражаются вероятности различных событий, связанных с S. Так, чтобы найти вероятность накрытия фиксированного элемента q случайным множеством S, достаточно вычислить

$$P(q \in S) = \mathrm{P}(\{\omega : q \in S(\omega)\}) = \sum_{A: q \in A, A \subseteq 2^Q} P(S = A),$$

где суммирование идет по всем подмножествам *A* множества *Q*, содержащим *q*. Пусть $Q=\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$. Рассмотрим случайные величины (значения характеристической функции случайного множества), определяемые по случайному множеству *S* следующим образом

$$\chi_i(\omega) = \begin{cases} 1, q_i \in S(\omega), \\ 0, q_i \notin S(\omega). \end{cases}$$

Определение 3. Случайное множество *S* называется случайным множеством с независимыми элементами, если случайные величины $\chi_i(\omega), i = 1,2,...,k,$ независимы (в совокупности).

Последовательность случайных величин $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k$ - это бернуллиевский вектор с $X_i = \chi_i$ и $p_i = P(q_i \in S(\omega)), i = 1,2,...,k.$ Из сказанного выше следует, что распределение случайного множества с независимыми элементами задается формулой

$$P(S = A) = \prod_{q_i \in A} p_i \prod_{q_i \in Q \setminus A} (1 - p_i),$$

т.е. такие распределения образуют $k = card(Q)$ - мерное параметрическое семейство, входящее в ($2^{card(Q)}$ - 1) - одномерное семейство всех распределений случайных подмножеств множества *Q*.

Случайные множества находят разнообразные применения в многообразных проблемах эконометрики и математической экономики. В том числе в задачах управлении запасами и ресурсами (см. об этом главу 5 в [170]), в задачах менеджмента и, в частности, маркетинга, в экспертных оценках, например, при анализе мнений голосующих или опрашиваемых, каждый из которых отмечает несколько пунктов из списка и т.д. Они используются при изучении распространения рекламной информации, в картах Кохонена (популярный метод представления информации при применении нейросетей) и т.д.

Методы ранговой статистики. Ранее установлено, что любой адекватный алгоритм в порядковой шкале является функцией от некоторой матрицы C. Пусть никакие два из результатов наблюдений $x_1, x_2,\ldots,x_n$ не совпадают, а $r_1, r_2,\ldots,r_n$ - их ранги. Тогда элементы матрицы C и ранги результатов наблюдений связаны взаимно однозначным соответствием:

$$r_i = 1 + \sum_{1 \le j \le n} (1 - c_{ij}),$$

а c_{ij} выражаются через ранги: $c_{ij} = 1$, если $r_i < r_j$, и $c_{ij} = 0$ в противном случае.

При обработке данных, измеренных в порядковой шкале, могут применяться только ранговые статистические методы. Отметим, что часто используемое в непараметрической статистике преобразование $Y = F(X)$ (здесь $F(x)$ - непрерывная функция распределения случайной величины X, причем F предполагается произвольной) фактически означает переход к порядковой шкале, поскольку статистические выводы при этом инвариантны относительно допустимых преобразований в порядковой шкале.

Ранговые статистические методы могут применяться не только при обработке данных, измеренных в порядковой шкале: для проверки независимости двух количественных признаков в случае, когда нет уверенности в нормальности двумерного распределения, используют коэффициенты ранговой корреляции Кендалла или Спирмена.

Объекты общей природы. Вероятностная модель объекта нечисловой природы в общем случае - случайный элемент со значениями в пространстве произвольного вида, а модель выборки таких объектов - совокупность независимых одинаково распределенных случайных элементов. Именно такая модель была использована для обработки наблюдений, каждое из которых - нечеткое множество [171].

Приведем определения из справочника по теории вероятностей [258].

Пусть (X, B) - некоторое измеримое пространство; (F, B)-измеримая функция $\xi = \xi(\omega)$ на пространстве элементарных событий (Ω, F, P) (где P - вероятностная мера на σ-алгебре F - измеримых подмножеств Ω, называемых событиями) со значениями в (X, B) называется *случайной величиной* (чаще этот математический объект называют случайным элементом, оставляя термин «случайная величина» за частным случаем, когда X - числовая прямая - А.О.) в фазовом пространстве (X, B). *Распределением вероятностей* этой случайной величины ξ называется функция $P_\xi = P_\xi(B)$ на σ-алгебре B фазового пространства, определенная как

$$P_\xi = P\{\xi \in B\} \quad (B \in \mathrm{B}) \qquad (4.10)$$

(распределение вероятностей P_ξ представляет собой вероятностную меру в фазовом пространстве (X, B)) [258, с. 132].

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - случайные величины на пространстве случайных событий (Ω, F, P) в соответствующих фазовых пространствах $(\mathrm{X}_k, \mathrm{B}_k)$. Совместным распределением вероятностей этих величин называется функция $P_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n} = P_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(B_1, B_2, ..., B_n)$, определенная на множествах $B_1 \in \mathrm{B}_1$, $B_2 \in \mathrm{B}_2$, …, $B_n \in \mathrm{B}_n$ как

$$P_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(B_1, B_2, ..., B_n) = P_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, ..., \xi_n \in B_n). \qquad (4.11)$$

Распределение вероятностей $P_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}$ как функция на полукольце множеств вида $B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$, $B_1 \in \mathrm{B}_1, B_2 \in \mathrm{B}_2, ..., B_n \in \mathrm{B}_n$, в произведении пространств $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_n$ представляет собой функцию распределения. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ называются *независимыми,* если при любых B_1, $B_2, …, B_n$ (см. [258, с.133])

$$P_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(B_1, B_2, ..., B_n) = P_{\xi_1}(B_1) P_{\xi_2}(B_2) ... P_{\xi_n}(B_n). \qquad (4.12)$$

Предположим, что совместное распределение вероятностей $P_{\xi,\eta}(A, B)$ случайных величин ξ и η абсолютно непрерывно относительно некоторой меры Q на произведении пространств $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, являющейся произведением мер Q_X и Q_Y, т.е.:

$$P_{\xi,\eta}(A,B) = \int\limits_{A\times B} p(x,y)Q(dx,dy) \qquad (4.13)$$

для любых $A \in \mathrm{A}$ и $B \in \mathrm{B}$, где $p(x,y)$ - соответствующая *плотность распределения вероятностей* [258, с.145].

В формуле (4.13) предполагается, что $\xi = \xi(\omega)$ и $\eta = \eta(\omega)$ - случайные величины на одном и том же пространстве элементарных событий Ω со значениями в фазовых пространствах (X,A) и (Y,B). Существование плотности $p(x,y)$ вытекает из абсолютной непрерывности $P_{\xi,\eta}(A,B)$ относительно Q в соответствии с теоремой Радона – Никодима [97].

Условное распределение вероятностей $P_{\xi}(A\,|\,\eta), A \in \mathrm{A},$ может быть выбрано одинаковым для всех $\omega \in \Omega,$ при которых случайная величина $\eta = \eta(\omega)$ сохраняет одно и то же значение: 4$\eta(\omega) = y.$ При почти каждом $y \in \mathrm{Y}$ (относительно распределения P_{η} в фазовом пространстве (Y,B)) условное распределение вероятностей $P_{\xi}(A\,|\,y) = P_{\omega,\xi}(A),$ где $\omega \in \{\eta = y\}$ и $A \in \mathrm{A},$ будет абсолютно непрерывно относительно меры Q_{X}:

$$Q_{\mathrm{X}}(A) = \int\limits_{A\times \mathrm{X}} Q(dx,dy).$$

Причем соответствующая плотность условного распределения вероятностей будет иметь вид (см. [258, с.145-146]):

$$p_{\xi}(x\,|\,y) = \frac{P_{\xi}(dx\,|\,y)}{Q_{\mathrm{X}}(dx)} = \frac{p(x,y)}{\int\limits_{\mathrm{X}} p(x,y)Q_{\mathrm{X}}(dx)}. \qquad (4.14)$$

При построении вероятностных моделей реальных явлений важны вероятностные пространства из конечного числа элементарных событий. Вместо плотностей и условных плотностей рассматриваются вероятности и условные вероятности. Отметим, что вероятности можно рассматривать как плотности относительно меры, приписывающей каждому элементу пространства элементарных событий вес 1, т.е. считающей меры

$$Q(A) = Card(A)$$

(мера каждого множества равна числу его элементов).

За последние тридцать лет в прикладной статистике сформировалась новая область - нечисловая статистика, или статистика нечисловых данных, она же - статистика объектов нечисловой природы. К настоящему времени она развита не менее, чем ранее выделенные статистика случайных величин, многомерный статистический анализ, статистика временных рядов и случайных процессов. Краткая сводка основных постановок и результатов прикладной статистики в пространствах нечисловой природы дана в настоящей главе (см. также [210, 225]).

4.2. Статистические методы в пространствах произвольной природы

Теория, построенная для результатов наблюдений, лежащих в пространствах общей природы, является центральным стержнем в нечисловой статистике. В ее рамках удалось разработать и изучить методы оценивания параметров и характеристик, проверки гипотез (в частности, с помощью статистик интегрального типа), параметрической и непараметрической регрессии (восстановления зависимостей), непараметрического оценивания плотности, дискриминантного и кластерного анализов и т.д.

Вероятностно-статистические методы, развитые для результатов наблюдений, принадлежащих пространствам произвольного вида, позволяют единообразно проводить анализ данных из любого конкретного пространства. Так, в [170] они применены к конечным случайным множествам, в [171] - к нечетким множествам. С их помощью установлено поведение обобщенного мнения экспертной комиссии (медианы Кемени) при увеличении числа экспертов, когда ответы экспертов лежат в том или ином пространстве бинарных отношений. Методы классификации могут быть основаны на непараметрических оценках плотности распределения вероятностей в пространстве общей природы.

Эмпирические и теоретические средние. Одна из основных статистических процедур - вычисление средних величин для тех или иных совокупностей данных. Законы больших чисел состоят в том, что эмпирические средние сходятся к теоретическим. В классическом варианте: выборочное среднее арифметическое при определенных условиях сходится по вероятности при росте числа слагаемых к математическому ожиданию. На основе законов больших чисел обычно доказывают состоятельность различных статистических оценок. В целом эта тематика занимает заметное место в теории вероятностей и математической статистике.

Однако математический аппарат при этом основан на свойствах сумм случайных величин (векторов, элементов линейных пространств). Следовательно, он не пригоден для изучения вероятностных и статистических проблем, связанных со случайными объектами нечисловой природы. Поэтому необходимо научиться усреднять различные нечисловые данные, т.е. определять эмпирические и теоретические средние в пространствах произвольной природы. Кроме того, представляется полезным получение законов больших чисел в пространствах нечисловой природы.

Для осуществления сформулированной научной программы необходимо решить следующие задачи.

А) Определить понятие эмпирического среднего.

Б) Определить понятие теоретического среднего.

В) Ввести понятие сходимости эмпирических средних к теоретическому.

Г) Доказать при тех или иных комплексах условий сходимость эмпирических средних к теоретическому.

Д) Обобщив это доказательство, получить метод обоснования состоятельности различных статистических оценок.

Е) Дать применения полученных результатов при решении конкретных задач.

Эта программа реализована нами, как показано в настоящем разделе.

Определения средних величин. Пусть X - пространство произвольной природы, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ - его элементы. Чтобы ввести эмпирическое среднее для $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, будем использовать действительнозначную функцию $f(x,y)$ двух переменных со значениями в X. В стандартных математических обозначениях: $f : X^2 \to R^1$. Величина $f(x,y)$ интерпретируется как показатель различия между x и y: чем $f(x,y)$ больше, тем x и y сильнее различаются. В качестве f можно использовать расстояние в X, квадрат расстояния и т.п.

Определение 4. Средней величиной для совокупности $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ (относительно меры различия f), обозначаемой любым из трех способов:

$x_{cp} = E_n(f) = E_n(x_1, x_2, x_3,...,x_n; f)$,

называем решение оптимизационной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y) \to \min, \quad y \in X. \qquad (4.15)$$

Это определение согласуется с классическими определениями средних величин. Если $X = R^1$, $f(x,y) = (x - y)^2$, то x_{cp} - выборочное среднее арифметическое (точнее, множество решений задачи (4.15) состоит из одного элемента, и этот элемент – выборочное среднее арифметическое). Если же $X = R^1$, $f(x,y) = |x - y|$, то при $n = 2k+1$ имеем $x_{cp} = x(k+1)$ (точнее, x_{cp} – это множество $\{x(k+1)\}$, состоящее из одного элемента $x(k+1)$), при $n = 2k$ эмпирическое среднее является отрезком $[x(k), x(k+1)]$. Здесь через $x(i)$ обозначен i-ый член вариационного ряда, построенного по $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, т.е. i-я порядковая статистика. Таким образом, при $X = R^1$, $f(x,y) = |x - y|$ решение задачи (4.15) дает естественное определение выборочной медианы. Правда, несколько отличающееся от определения, в котором при $n = 2k$ выборочной медианой называют полусумму двух центральных членов вариационного ряда $(x(k) + x(k+1))/2$. Иногда $x(k)$ называют левой медианой, а $x(k+1)$ - правой медианой [170].

Решением задачи (4.15) является множество $E_n(f)$, которое может быть пустым, состоять из одного или многих элементов. Выше приведен пример, когда решением является отрезок. Если $X = R^1\backslash\{x_0\}$, $f(x,y) = (x - y)^2$, а среднее арифметическое выборки равно x_0, то $E_n(f)$ пусто.

При моделировании реальных ситуаций часто можно принять, что X состоит из конечного числа элементов. Тогда множество $E_n(f)$ непусто - минимум на конечном множестве всегда достигается.

Будем считать, что функция f измерима относительно σ-алгебры, участвующей в определении случайного элемента $x = x(\omega)$. Тогда $f(x(\omega), y)$ при фиксированном y является действительнозначной случайной величиной. Предположим, что она имеет математическое ожидание.

Определение 5. Теоретическим средним $E(x,f)$ (другими словами, математическим ожиданием) случайного элемента $x = x(\omega)$ относительно меры различия f называется решение оптимизационной задачи

$$Mf(x(\omega), y) \to \min, y \in X. \qquad (4.16)$$

Это определение, как и для эмпирических средних, согласуется с классическим. Если $X = R^1$, $f(x,y) = (x - y)^2$, то $E(x,f) = M(x(\omega))$ - обычное математическое ожидание (точнее, множество решений задачи (4.16) состоит из одного элемента, и этот элемент – математическое ожидание $M(x(\omega))$). При этом $\min M f(x(\omega), y)$ - дисперсия случайной величины $x = x(\omega)$. Если же $X = R^1$, $f(x,y) = |x - y|$, то $E(x,f) = [a,b]$, здесь $a = \sup\{t: F(t) \leq 0,5\}$, $b = \inf\{t: F(t) \geq 0,5\}$, где $F(t)$ - функция распределения случайной величины $x = x(\omega)$. Если график $F(t)$ имеет плоский участок на уровне $F(t) = 0,5$, то медиана - теоретическое среднее в смысле определения 2 - является отрезком. В классическом случае обычно говорят, что каждый элемент отрезка $[a; b]$ является одним из возможных значений медианы. Поскольку наличие указанного плоского участка - исключительный случай, то обычно решением задачи (4.16) является множество из одного элемента $a = b$, т.е. классическая медиана распределения случайной величины $x = x(\omega)$.

Теоретическое среднее $E(x, f)$ можно определить лишь тогда, когда $Mf(x(\omega), y)$ существует при всех $y \in X$. Оно может быть пустым множеством, например, если $X = R^1 \backslash \{x_0\}$, $f(x,y) = (x - y)^2$, $x_0 = M(x(\omega))$. И то, и другое исключается, если X конечно. Однако и для конечных X теоретическое среднее может состоять не из одного, а из многих элементов. Отметим, однако, что в множестве всех распределений вероятностей на X подмножество тех распределений, для которых $E(x,f)$ состоит более чем из одного элемента, имеет коразмерность 1, поэтому основной является ситуация, когда множество $E(x,f)$ содержит единственный элемент [170].

Существование средних величин. Под существованием средних величин будем понимать непустоту множеств решений соответствующих оптимизационных задач.

Если X состоит из конечного числа элементов, то минимум в задачах (4.15) и (4.16) берется по конечному множеству. А потому, как уже отмечалось, эмпирические и теоретические средние существуют.

Пусть число элементов X бесконечно. Ввиду важности обсуждаемой темы приведем точные формулировки [200, 210]. Для строгого математического изложения нам понадобятся термины из общей топологии. Будем их использовать в соответствии с [87]. Так, топологическое пространство называется бикомпактным в том и только в том случае, когда из каждого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие [87, с.183].

Пусть X - бикомпактное пространство, функция f непрерывна на X^2 (в топологии произведения). Тогда эмпирическое и теоретическое средние существуют.

В ряде интересных для приложений ситуаций X не является бикомпактным пространством. Например, если $X = R^1$. В этих случаях приходится наложить на показатель различия f некоторые ограничения.

Пусть X - топологическое пространство, непрерывная (в топологии произведения) функция f: $X^2 \to R^2$ неотрицательна, симметрична (т.е. $f(x,y) = f(y,x)$ для любых x и y из X), существует число $D > 0$ такое, что при всех x, y, z из X

$f(x,y) \le D\{f(x,z) + f(z,y)\}$. (4.17)

Пусть в X существует точка x_0 такая, что при любом положительном R множество {x: $f(x, x_0) \le R$} является бикомпактным. Пусть для случайного элемента $x(\omega)$, согласованного с топологией в рассмотренном выше смысле, существует $g(x_0) = Mf(x(\omega), x_0)$.

Тогда существуют (т.е. непусты) математическое ожидание $E(x,f)$ и эмпирические средние $E_n(f)$.

Замечание. Условие (4.17) - некоторое обобщение неравенства треугольника. Например, если g - метрика в X, а $f = g^p$ при некотором натуральном p, то для f выполнено соотношение (4.17) с $D = 2^p$.

О формулировках законов больших чисел. Пусть $x, x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ - независимые одинаково распределенные случайные элементы со значениями в X. Закон больших чисел - это утверждение о сходимости эмпирических средних к теоретическому среднему (математическому ожиданию) при росте объема выборки n, т.е. утверждение о том, что

$$E_n(f) = E_n(x_1, x_2, x_3, ..., x_n; f) \to E(x, f) \qquad (4.18)$$

при $n \to \infty$. Однако и слева, и справа в формуле (4.18) стоят, вообще говоря, множества. Поэтому понятие сходимости в (4.18) требует обсуждения и определения.

В силу классического закона больших чисел при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y) \to Mf(x, y) \qquad (4.19)$$

в смысле сходимости по вероятности, если правая часть существует.

Если пространство X состоит из конечного числа элементов, то из соотношения (4.19) легко вытекает (см., например, [170, с.192-193]), что

$$\lim_{n\to\infty} P\{E_n(f) \subseteq E(x,f)\} = 1. \qquad (4.20)$$

Другими словами, $E_n(f)$ является состоятельной оценкой $E(x,f)$.

Если $E(x,f)$ состоит из одного элемента, $E(x,f)=\{x_0\}$, то соотношение (4.20) переходит в следующее:

$$\lim_{n\to\infty} P\{E_n(f) = \{x_0\}\} = 1. \qquad (4.21)$$

Однако с прикладной точки зрения доказательство соотношений (4.20) - (4.21) не дает достаточно уверенности в возможности использования $E_n(f)$ в качестве оценки $E(x,f)$. Причина в том, что в процессе доказательства объем выборки предполагается настолько большим, что при всех $y \in X$ одновременно левые части соотношений (4.19) сосредотачиваются в непересекающихся окрестностях правых частей.

Если X не является конечным, например, $X = R^1$, то соотношения (4.20) и (4.21) неверны. Поэтому необходимо искать иные формулировки закона больших чисел. В классическом случае сходимости выборочного среднего арифметического к математическому ожиданию, т.е. $\bar{x} \to M(x)$, можно записать закон больших чисел так: для любого $\varepsilon > 0$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\{\bar{x} \in (M(x)-\varepsilon;\ M(x)+\varepsilon)\} = 1. \qquad (4.22)$$

В этом соотношении в отличие от (4.20) речь идет о попадании эмпирического среднего $E_n(f)=\bar{x}$ не непосредственно внутрь теоретического среднего $E(x,f)$, а в некоторую *окрестность* теоретического среднего (для случайных величин с непрерывными функциями распределения вероятность совпадения выборочного среднего арифметического и математического ожидания, т.е. вероятность выполнения соотношений (4.20) и (4.21), равна 0).

Обобщим эту формулировку. Как задать окрестность теоретического среднего в пространстве произвольной природы? Естественно взять его окрестность, определенную с помощью какой-либо метрики. Однако полезно обеспечить на ее дополнении до X *отделенность* множества значений $Mf(x(\omega),y)$ как функции y от минимума этой функции на всем X.

Поэтому мы сочли целесообразным определить такую окрестность с помощью самой функции $Mf(x(\omega),y)$.

Определение 6. Для любого $\varepsilon > 0$ назовем ε-пяткой функции $g(x)$ множество

$$K_\varepsilon(g) = \{x : g(x) < \inf\{d(y), y \in X\} + \varepsilon, x \in X\}.$$

Таким образом, в ε-пятку входят все те x, для которых значение $g(x)$ либо минимально, либо отличается от минимального (или от инфимума – точной нижней грани) не более чем на ε. Так, для $X = R^1$ и функции $g(x) = x^2$ минимум равен 0, а ε-пятка имеет вид интервала $(-\sqrt{\varepsilon}; \sqrt{\varepsilon})$. В формулировке (4.22) классического закона больших чисел утверждается, что при любом $\varepsilon>0$ вероятность попадания среднего арифметического в $\sqrt{\varepsilon}$-пятку математического ожидания стремится к 1. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то вместо $\sqrt{\varepsilon}$-пятки можно говорить о ε-пятке, т.е. перейти от (4.22) к эквивалентной записи

$$\lim_{n\to\infty} P\{\overline{x} \in K_\varepsilon(M(x(\omega) - x)^2\} = 1. \qquad (4.23)$$

Соотношение (4.23) допускает непосредственное обобщение на общий случай пространств произвольной природы.

Пусть $x, x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ *- независимые одинаково распределенные случайные элементы со значениями в пространстве произвольной природы X с показателем различия f:* $X^2 \to R^1$. *Пусть выполнены некоторые математические условия регулярности. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} P\{E_n(f) \subseteq K_\varepsilon(E(x,f))\} = 1. \qquad (4.24)$$

Аналогичным образом может быть сформулирована и общая идея усиленного закона больших чисел. Ниже приведены две конкретные формулировки «условий регулярности».

Начнем с рассмотрения естественного обобщения конечного множества - бикомпактного пространства X.

Пусть X - бикомпактное пространство, функция f непрерывна на X^2 (в топологии произведения). Тогда справедливо соотношение (4.24).

Если X не является бикомпактным пространством, то необходимо суметь оценить рассматриваемые суммы «на периферии», вне бикомпактного ядра, которое обычно выделяется естественным путем. Один из возможных комплексов условий сформулирован выше.

Пусть X - топологическое пространство, непрерывная (в топологии произведения) функция $f\colon X^2 \to R^2$ неотрицательна, симметрична (т.е. $f(x,y) = f(y,x)$ для любых x и y из X), существует число $D > 0$ такое, что при всех x, y, z из X справедливо (4.17). Пусть в X существует точка x_0 такая, что при любом положительном R множество $\{x\colon f(x, x_0) \leq R\}$ является бикомпактным. Пусть для случайного элемента $x(\omega)$, согласованного с топологией в рассмотренном выше смысле, существует $g(x_0) = Mf(x(\omega), x_0)$. Тогда *справедлив закон больших чисел,* т.е. справедливо соотношение (4.24).

Получены и иные варианты законов больших чисел [172].

Непараметрические оценки плотности. Плотности распределения вероятностей используются при решении различных задач анализа данных. Так, согласно лемме Неймана-Пирсона оптимальное правило принятия решений при проверке статистических гипотез основано на отношении плотностей распределения вероятностей, соответствующих нулевой и альтернативной гипотезам. Непараметрическая оценка регрессионной зависимости строится путем замены неизвестной исследователю плотности совместного распределения на непараметрическую состоятельную оценку этой плотности. Для решения задач классификации, как кластер-анализа, так и диагностики (дискриминации, распознавания образов с учителем), используют непараметрические оценки плотности [210].

Каждому элементу выборки соответствует в эмпирическом распределении вероятность $1/n$, где n – объем выборки. Целесообразно эту вероятность не помещать в одну точку, а «размазать» вокруг нее, построив «холмик». Если «холмики» налегают друг на друга, то получаем положительную плотность на всей прямой. Чтобы получить состоятельную оценку плотности, необходимо выбирать ширину «холмика» в зависимости от объема выборки. При этом число «холмиков», покрывающих фиксированную точку, должно безгранично расти. Но одновременно доле таких «холмиков» следует убывать, поскольку покрывающие «холмики» должны быть порождены лишь ближайшими членами вариационного ряда.

Реализация описанной идеи привела к различным вариантам непараметрических оценок плотности. Основополагающей является работа Н.В. Смирнова 1951 г. [292]. Вначале рассматривались непараметрические оценки плотности распределения числовых случайных величин и конечномерных случайных векторов. Нам удалось сконструировать такие оценки в пространствах произвольной природы [174], а затем и для конкретных видов нечисловых данных [185].

При описании числовых данных часто используют гистограммы. При этом область изменения случайной переменной разбивают на интервалы равной длины, подсчитывают число попаданий в каждый интервал и строят соответствующую столбиковую диаграмму. Она напоминает график плотности. И действительно, Н.В. Смирнов показал в работе [292], что последовательность гистограмм при определенных условиях сходится к плотности.

Понятие плотности в пространстве произвольной природы X требует специального обсуждения. В пространстве X должна быть выделена некоторая специальная мера μ, относительно которой будут рассматриваться плотности, соответствующие другим мерам, например, мере ν, задающей распределение вероятностей некоторого случайного элемента ξ. В таком случае $\nu(A)$ = P($\xi \in A$) для любого случайного события A. Плотность $f(x)$, соответствующая мере ν - это такая функция, что

$$\nu(A) = \int_A f(x) d\mu$$

для любого случайного события A. Для случайных величин и векторов мера μ - это объем множества A, в математических терминах - мера Лебега. Для дискретных случайных величин и элементов со значениями в конечном множестве X в качестве меры μ естественно использовать считающую меру, которая событию A ставит в соответствие число его элементов. Используют также нормированную случайную меру, когда число точек в множестве A делят на число точек во всем пространстве X. В случае считающей меры значение плотности в точке x совпадает с вероятностью попасть в точку x, т.е. $f(x)$ = P($\xi = x$). Таким образом, с рассматриваемой точки зрения стирается грань между понятиями «плотность вероятности» и «вероятность (попасть в точку)».

Методы оценивания плотности вероятности в пространствах общего вида предложены и первоначально изучены в [174]. Предлагаем использовать непараметрические ядерные оценки плотности:

$$f_n(x) = \frac{1}{\eta_n(h_n, x)} \sum_{1 \le i \le n} K\left(\frac{d(x_i, x)}{h_n}\right),$$

где K: $R^1_+ \to R^1$ - ядерная функция, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, - выборка, по которой оценивается плотность, $d(x_i, x)$ - показатель различия (метрика, расстояние, мера близости) между элементом выборки x_i и точкой x, в которой оценивается плотность, последовательность h_n показателей размытости такова, что $h_n \to 0$ и $nh_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а $\eta_n(h_n, x)$ - нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение условия нормировки (интеграл по всему пространству от непараметрической оценки плотности $f_n(x)$ по мере μ

должен равняться 1). Ранее Е. Парзен и М. Розенблатт использовали подобные статистики для $X = R^1$ с $d(x_i, x) = |x_i - x|$.

Введенные описанным образом ядерные оценки плотности - частный случай так называемых линейных оценок, также впервые предложенных в работе [174]. В теоретическом плане они выделяются тем, что удается получать результаты такого же типа, что в классическом одномерном случае, но, разумеется, с помощью совсем иного математического аппарата.

Рассмотрим выборку со значениями в некотором пространстве произвольного вида. В этом пространстве предполагаются заданными показатель различия d и мера μ. Одна из основных идей рассматриваемого подхода состоит в том, чтобы согласовать их между собой. А именно, на их основе построим новый показатель различия d_1, так называемый «естественный», в терминах которого проще формулируются свойства непараметрической оценки плотности. Для этого рассмотрим шары $L_t(x) = \{y \in X : d(y,x) \le t\}$ радиуса $t \ge 0$ и их меры $F_x(t) = \mu(L_t(x))$. Предположим, что $F_x(t)$ как функция t при фиксированном x непрерывна и строго возрастает. Введем функцию $d_1(x,y) = F_x(d(x,y))$. Это - монотонное преобразование показателя различия или расстояния, а потому $d_1(x,y)$ - также показатель различия (даже если d - *метрика,* для d_1 неравенство треугольника может быть не выполнено). Другими словами, $d_1(x,y)$, как и $d(x,y)$, можно рассматривать как показатель различия (меру близости) между x и y.

Для вновь введенного показателя различия $d_1(x,y)$ введем соответствующие шары $L_{1t}(x) = \{y \in X : d_1(y,x) \le t\}$. Поскольку обратная функция $F^{-1}_x(t)$ определена однозначно, то

$$L_{1t}(x) = \{y \in X : d_1(y,x) \le F_x^{-1}(t)\} = L_T(x),$$

где $T = F^{-1}_x(t)$. Следовательно, справедлива цепочка равенств $F^1_x(t) = \mu(L_{1t}(x)) = \mu(L_T(x)) = F_x(F^{-1}_x(t)) = t$ (для всех тех значений параметра t, для которых определены все участвующие в записи математические объекты).

Переход от d к d_1 напоминает классическое преобразование, использованное Н.В. Смирновым при изучении непараметрических критериев согласия и однородности, а именно, преобразование $\eta = F(\xi)$, переводящее случайную величину ξ с непрерывной функцией распределения $F(x)$ в случайную величину η, равномерно распределенную на отрезке [0,1]. Оба рассматриваемых преобразования существенно упрощают дальнейшие рассмотрения. Преобразование $d_1 = F_x(d)$ зависит от точки x, что не влияет на дальнейшие рассуждения, поскольку ограничиваемся изучением сходимости в отдельно взятой точке.

Функцию $d_1(x,y)$, для которой мера шара радиуса t равна t, называем в соответствии с работой [174] «естественным показателем различия» или «естественной метрикой». В случае конечномерного пространства R^k и евклидовой метрики d имеем $d_1(x,y) = c_k\, d^k(x,y)$, где c_k - объем шара единичного радиуса в R^k .

Поскольку можно записать, что

$$K\left(\frac{d(x_i, x)}{h_n}\right) = K_1\left(\frac{d_1(x_i, x)}{h_n}\right),$$

где

$$K_1(u) = K\left(\frac{F_x^{-1}(uh_n)}{h_n}\right),$$

то переход от одного показателя различия к другому, т.е. от d к d_1, соответствует переходу от одной ядерной функции к другой, т.е. от K к K_1. Выгода от такого перехода заключается в том, что утверждения о поведении непараметрических оценок плотности приобретают более простую формулировку.

Пусть d - естественная метрика, плотность f непрерывна в точке x и ограничена на всем пространстве X , причем $f(x) > 0$, ядерная функция $K(u)$ удовлетворяет простым условиям регулярности

$$\int_0^1 K(u)du = 1, \int_0^\infty (|K(u)| + K^2(u))du < \infty$$
.

Тогда $\eta_n(h_n, x) = nh_n$, *оценка* $f_n(x)$ *является состоятельной, т.е.* $f_n(x) \to f(x)$ *по вероятности при* $n \to \infty$ *и, кроме того,*

$$\lim_{n\to\infty}(nh_n Df_n(x)) = f(x)\int_0^{+\infty} K^2(u)du.$$

Остается открытым вопрос о скорости сходимости ядерных оценок, в частности, о поведении величины $\alpha_n = M(f_n(x)\text{-}f(x))^2$ - среднего квадрата ошибки, и об оптимальном выборе показателей размытости h_n . Для случайного элемента $X(\omega)$ рассмотрим т.н. круговое распределение $G(x,t) = P\{d(X(\omega), x) \leq t\}$ и круговую плотность $g(x,t) = G'_t(x,t)$.

Пусть ядерная функция $K(u)$ *непрерывна и финитна, т.е. существует число* E *такое, что* $K(u) = 0$ *при* $u > E$. *Пусть круговая плотность является достаточно гладкой, т.е. допускает разложение*

$$g(x,t) = f(x) + tg'_t(x,0) + \frac{t^2}{2}g''_{tt}(x,0) + \frac{t^3}{3!}g'''_{ttt}(x,0) + \ldots + \frac{t^k}{k!}g^{(k)}_{t^{(k)}}(x,0) + o(h_n^k)$$

при некотором натуральном k, *причем остаточный член равномерно ограничен на* $[0, hE]$. *Пусть*

$$\int_0^E u^i K(u)du = 0, i = 1,2,\ldots,k-1.$$

Тогда

$$\alpha_n = [Mf_n(x) - f(x)]^2 + Df_n(x) =$$

$$= h_n^{2k}\left(\int_0^E u^k K(u)du\right)^2 (g^k_{t^{(k)}}(x,0))^2 + \frac{f(x)}{nh_n}\int_0^E K^2(u)du + o\left(h_n^{2k} + \frac{1}{nh_n}\right).$$

Два последних утверждения доказываются методами, развитыми в работе [174]. Если коэффициенты при основных членах в правой части последней формулы не равны 0, то величина α_n достигает минимума, равного $\alpha_n = O\left(n^{-1+\frac{1}{2k+1}}\right)$, при $h_n = n^{-\frac{1}{2k+1}}$. Эти выводы совпадают с классическими результатами, полученными ранее рядом авторов для частного случая прямой $X = R^1$ (см., например, [77, с.316]). Для уменьшения смещения оценки применяем знакопеременные ядра $K(u)$.

Непараметрические оценки плотности в конечных пространствах [185]. В случае пространств из конечного числа элементов естественных метрик не существует. Однако можно, переходить к пределу не только по объему выборки n, но и по новому параметру дискретности m.

Рассмотрим некоторую последовательность X_m, $m = 1, 2, \ldots$, конечных пространств. Пусть в X_m заданы показатели различия d_m. Будем использовать нормированные считающие меры μ_m, ставящие в соответствие каждому подмножеству A долю элементов всего пространства X_m, входящих в A. Как и ранее, рассмотрим как функцию t объем шара радиуса t, т.е. $F_{mx}(t) = \mu_m(\{y \in X_m : d_m(x, y) \le t\})$.

Введем аналог естественного показателя различия $d_{1m}(x, y) = F_{mx}(d_m(x, y))$. Наконец, рассмотрим аналоги преобразования Смирнова $F^1_{mx}(t) = \mu_m(\{y \in X_m : d_{1m}(x, y) \le t\})$. Функции $F^1_{mx}(t)$, в отличие от ситуации предыдущего раздела, уже не совпадают тождественно с t, они кусочно-постоянны и имеют скачки в некоторых точках t_i, $i = 1, 2, \ldots$, причем в этих точках $F^1_{mx}(t_i) = t_i$.

Пусть точки скачков равномерно сближаются, т.е. $\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$ *при* $m \to \infty$ (*другими словами*, $\sup|F^1_{mx}(t) - t| \to 0$ *при* $m \to \infty$). *Тогда существует последовательность параметров дискретности* m_n *такая, что при предельном переходе* $n \to \infty, m \to \infty, m \ge m_n$ *справедливы заключения ранее приведенных утверждений об асимптотических свойствах непараметрических ядерных оценок плотности.*

Пример 1. Пространство $X_m = 2^{\sigma(m)}$ всех подмножеств конечного множества $\sigma(m)$ из m элементов допускает [170] аксиоматическое введение метрики $d(A,B)=card(A\Delta B)/2^m$, где Δ - символ симметрической разности множеств. Рассмотрим непараметрическую ядерную оценку плотности типа Парзена - Розенблатта

$$f_{nm}(A)=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{1}{h_n}\Phi\left(\frac{2card(A\Delta X_i)-m}{\sqrt{m}}\right)\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ - функция нормального стандартного распределения. Можно показать, что эта оценка удовлетворяет условиям с $m_n=(\ln n)^6$.

Пример 2. Рассмотрим пространство функций $f:Y_r\to Z_q$, определенных на конечном множестве $Y_r=\{1/r,\ 2/r,...,(r-1)/r,\ 1\}$, со значениями в конечном множестве $Z_q=\{0,\ 1/q,\ 2/q,...,(q-1)/q,\ 1\}$. Это пространство можно интерпретировать как пространство нечетких множеств, а именно, Y_r - носитель нечеткого множества, а Z_q - множество значений функции принадлежности. Очевидно, число элементов пространства X_m равно $(q+1)^r$. Будем использовать расстояние $d(f,g)=\sup|f(y)-g(y)|$ в этом пространстве. Непараметрическая оценка плотности имеет вид:

$$f_{nm}(x)=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{[2\sup_y|x(y)-x_i(y)|+1/q]^r}{h_n(1+1/q)^r}\right).$$

Если $r=n^\alpha,\ q=n^\beta$, то при $\beta>\alpha$ выполнены условия последнего утверждения.

Пример 3. Рассматривая пространства ранжировок m объектов, в качестве расстояния $d(A,B)$ между ранжировками A и B примем минимальное число инверсий, необходимых для перехода от A к B. Тогда $\max(t_i-t_{i-1})$ не стремится к 0 при $m\to\infty$, условия не выполнены.

Пример 4. В прикладных работах наиболее распространенный пример объектов нечисловой природы – вектор разнотипных данных: реальный объект описывается вектором, часть координат которого - значения количественных признаков, а часть - качественных (номинальных и порядковых). Для пространств разнотипных признаков, т.е. декартовых произведений непрерывных и дискретных пространств, возможны различные постановки. Пусть, например, число градаций качественных признаков остается постоянным. Тогда непараметрическая оценка плотности сводится к произведению двух величин - частоты попадания в точку в пространстве качественных признаков и классической оценки типа Парзена-Розенблатта в пространстве количественных переменных. В общем случае расстояние $d(x,y)$ можно, например, рассматривать как сумму трех расстояний. А именно, евклидова расстояния d_1 между количественными факторами, расстояния d_2 между номинальными признаками ($d_2(x,y) = 0$, если $x = y$, и $d_2(x,y) = 1$, если $x \neq y$) и расстояния d_3 между порядковыми переменными (если x и y - номера градаций, то $d_3(x,y) = |x - y|$). Наличие количественных факторов приводит к непрерывности и строгому возрастанию функции $F_{mx}(t)$, а потому для непараметрических оценок плотности в пространствах разнотипных признаков верны сформулированные выше утверждения.

Программная реализация описания данных с помощью непараметрических оценок плотности включена в ряд программных продуктов по прикладной статистике, в частности, в пакет программ анализа данных ППАНД [244].

4.3. Методы статистики нечисловых данных конкретных видов

Получен ряд новых научных результатов, касающихся конкретных видов объектов нечисловой природы. Рассмотрим три сюжета:

- характеризация средних величин шкалами измерения;
- теория люсианов;
- сведение теории нечетких множеств к теории случайных множеств.

Инвариантные алгоритмы и средние величины. Основное требование к алгоритмам анализа данных формулируется в теории измерений так: *выводы, сделанные на основе данных, измеренных в шкале определенного типа, не должны меняться при допустимом преобразовании шкалы измерения этих данных.* Другими словами, выводы должны быть *инвариантны* по отношению к допустимым преобразованиям шкалы.

Требование инвариантности выводов накладывает ограничения на множество возможных алгоритмов анализа данных. В качестве примера рассмотрим порядковую шкалу. Одни алгоритмы анализа данных позволяют получать адекватные выводы, другие - нет. Например, в задаче проверки однородности двух независимых выборок алгоритмы ранговой статистики (т.е. использующие только ранги результатов измерений) дают адекватные выводы, а статистики Крамера-Уэлча и Стьюдента - нет. Значит, для обработки данных, измеренных в порядковой шкале, критерии Смирнова, Лемана-Розенблатта и Вилкоксона можно использовать, а критерии Крамера-Уэлча и Стьюдента – нет [200].

Требование инвариантности является достаточно сильным. Из многих алгоритмов анализа статистических данных ему удовлетворяют лишь некоторые. Покажем это на примере сравнения средних величин [190, 381].

Средние величины. Среди всех методов анализа данных важное место занимают алгоритмы усреднения. При разработке управленческих решений средние величины используются обычно для замены совокупности чисел одним числом с целью сравнения совокупностей с помощью средних. Пусть, например, $Y_1, Y_2,...,Y_n$ - совокупность оценок n экспертов, «выставленных» одному объекту экспертизы (например, одному из вариантов стратегического развития фирмы), $Z_1, Z_2,...,Z_n$ - второму (другому варианту такого развития). Как сравнивать эти совокупности? Проще всего - по средним значениям.

Общее понятие средней величины введено О. Коши: средней величиной является любая функция $f(X_1, X_2,...,X_n)$ такая, что при всех возможных значениях аргументов значение этой функции не меньше, чем минимальное из чисел $X_1, X_2,...,X_n$, и не больше, чем максимальное из них [61].

Пусть $f(X_1, X_2,...,X_n)$ - среднее по Коши. Пусть среднее по первой совокупности меньше среднего по второй совокупности:

$f(Y_1, Y_2,...,Y_n) < f(Z_1, Z_2,...,Z_n)$.

Тогда для устойчивости результата сравнения средних необходимо, чтобы для любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований в соответствующей шкале было справедливо неравенство

$f(g(Y_1), g(Y_2),...,g(Y_n)) < f(g(Z_1), g(Z_2),...,g(Z_n))$,

т.е. среднее преобразованных значений из первой совокупности также было меньше среднего преобразованных значений для второй совокупности. Причем сформулированное условие должно быть выполнено для любых двух совокупностей $Y_1, Y_2,...,Y_n$ и $Z_1, Z_2,...,Z_n$ и любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований, задающей шкалу.

Средние величины, удовлетворяющие сформулированному условию, назовем *допустимыми* (в соответствующей шкале). Согласно теории измерений только допустимыми средними величинами можно пользоваться при анализе мнений экспертов и иных данных, измеренных в рассматриваемой шкале. Удается описать вид допустимых средних величин в основных шкалах [170].

Из всех средних по Коши допустимыми средними в порядковой шкале являются только члены вариационного ряда (*порядковые статистики*).

Это утверждение справедлива при условии, что средняя величина $f(X_1, X_2,...,X_n)$ является непрерывной (по совокупности переменных) и симметрической функцией. Последнее означает, что при перестановке аргументов значение функции $f(X_1, X_2,...,X_n)$ не меняется. Это условие является вполне естественным, ибо среднюю величину находим для *совокупности* (*набора, множества*) чисел, а не для *последовательности*. Множество не меняется в зависимости от того, в какой последовательности перечисляем его элементы.

Приведем численный пример, показывающий некорректность использования среднего арифметического $f(X_1, X_2) = (X_1 + X_2)/2$ в порядковой шкале. Пусть $Y_1 = 1$, $Y_2 = 11$, $Z_1 = 6$, $Z_2 = 8$. Тогда $f(Y_1, Y_2) = 6$, что меньше, чем $f(Z_1, Z_2) = 7$. Пусть строго возрастающее преобразование g таково, что $g(1) = 1$, $g(6) = 6$, $g(8) = 8$, $g(11) = 99$. Например, можно положить $g(x) = x$ для x, не превосходящих 8, и $g(x) = 99(x\text{-}8)/3 + 8$ для x, больших 8. Тогда $f(g(Y_1), g(Y_2)) = 50$, что больше, чем $f(g(Z_1), g(Z_2)) = 7$. Как видим, в результате допустимого, т.е. строго возрастающего преобразования шкалы упорядоченность средних величин изменилась. Таков же результат применения допустимого преобразования $g(x) = x^2$. Тогда $g(1) = 1$, $g(6) = 36$, $g(8) = 64$, $g(11) = 121$, а потому $f(g(Y_1), g(Y_2)) = 61$, что больше, чем $f(g(Z_1), g(Z_2)) = 50$.

Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ *- независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения* $F(x)$, *а* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ *- независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения* $H(x)$, *причем выборки* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ *и* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ *независимы между собой и* $MY_1 > MZ_1$. *Для того, чтобы вероятность события*

$$\left\{\omega: \frac{g(Y_1) + g(Y_2) + \ldots + g(Y_m)}{m} > \frac{g(Z_1) + g(Z_2) + \ldots + g(Z_n)}{n}\right\}$$

стремилась к 1 *при* $\min(m, n) \to \infty$ *для любой строго возрастающей непрерывной функции g, удовлетворяющей условию*

$$\overline{\lim_{|x| \to \infty}} \left| \frac{g(x)}{x} \right| < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех x выполнялось неравенство $F(x) \le H(x)$, *причем существовало число* x_0, *для которого* $F(x_0) < H(x_0)$.

Согласно этому утверждению средним арифметическим допустимо пользоваться и в порядковой шкале, если сравниваются выборки из двух распределений, удовлетворяющих неравенству $F(x) \leq H(x)$, т.е. одна из функций распределения должна всегда лежать над другой. Функции распределения не могут пересекаться, им разрешается только касаться друг друга. Это условие выполнено, например, если функции распределения отличаются только сдвигом, т.е. $F(x) = H(x+b)$ при некотором b. Последнее условие выполняется, если два значения некоторой величины измеряются с помощью одного и того же средства измерения, у которого распределение погрешностей не меняется при переходе от измерения одного значения рассматриваемой величины к измерению другого.

Средние по Колмогорову. Естественная система аксиом (требований к средним величинам) приводит к так называемым ассоциативным средним. Их общий вид нашел в 1930 г. А.Н.Колмогоров [96]. Теперь их называют «средними по Колмогорову» (иногда – «средними Колмогорова»).

Для чисел $X_1, X_2,...,X_n$ средним по Колмогорову является

$G\{(F(X_1) + F(X_2) +...+ F(X_n))/n\}$,

где F - строго монотонная функция (т.е. строго возрастающая или строго убывающая), G - функция, обратная к F.

Если $F(x) = x$, то среднее по Колмогорову - это среднее арифметическое, если $F(x) = \ln x$, то среднее геометрическое, если $F(x) = 1/x$, то среднее гармоническое, если $F(x) = x^2$, то среднее квадратическое, и т.д. (в последних трех случаях усредняются положительные величины).

Средние по Колмогорову - частный случай средних по Коши. Медиану и моду нельзя представить в виде средних по Колмогорову.

В шкале интервалов из всех средних по Колмогорову допустимым является только среднее арифметическое (*при справедливости некоторых слабых внутриматематических условий регулярности*).

В шкале отношений из всех средних по Колмогорову допустимыми являются только степенные средние с $F(x) = x^c$, $c \neq 0$, *и среднее геомет-*

рическое (*при справедливости некоторых слабых внутриматематических условий регулярности*).

Есть ли средние по Колмогорову, которыми нельзя пользоваться в шкале отношений? Например, с $F(x) = e^x$.

Аналогично средним величинам могут быть изучены и другие статистические характеристики - показатели разброса, связи, расстояния и др. (см., например, [170, 305, 308]). Коэффициент корреляции не меняется при любом допустимом преобразовании в шкале интервалов, как и отношение дисперсий. Дисперсия не меняется в шкале разностей, коэффициент вариации - в шкале отношений, и т.д. Ранговые статистики не меняются при допустимых преобразованиях в порядковой шкале (например, статистики Вилкоксона, Лемана-Розенблатта, рассмотренные в главе 3).

Приведенные выше результаты о средних величинах широко применяются, причем не только в экспертных исследованиях, но и в теории принятия решений, экономике, менеджменте, инженерном деле. Например, для анализа методов агрегирования датчиков в АСУ ТП (автоматизированных системах управления технологическими процессами) доменных печей. Велико прикладное значение теории измерений в задачах стандартизации и управления качеством, в частности, в квалиметрии [107, 327]. Обзор [10] посвящен анализу многочисленных работ последних десятилетий, посвященных связи теории измерений и теории средних величин.

При подготовке и принятии управленческих решений необходимо использовать только инвариантные алгоритмы обработки данных. Требование инвариантности выделяет из многих алгоритмов усреднения лишь некоторые, соответствующие используемым шкалам измерения. Инвариантные алгоритмы в общем случае рассматриваются в математической теории измерений [266]. Нацеленное на прикладные исследования изложение ряда вопросов теории измерений дается в монографиях [170, 200, 207, 213, 243, 321].

Теория люсианов. Люсианы - это конечные (длины k) последовательности независимых испытаний Бернулли с, вообще говоря, разными вероятностями успеха [200, 243]. Распределение люсиана A задается вектором параметров $P = (p_1, p_2..., p_k)$, где p_i - вероятность того, что i-я координата люсиана A равна 1 (и с вероятностью 1 - p_i она равна 0), $i = 1, 2, ..., k$. В теории люсианов центральное место занимают методы проверки трех гипотез - согласованности, однородности и независимости [210].

Пусть $A_1, A_2, ..., A_s$ - независимые (между собой) люсианы с векторами параметров $P_1, P_2, ..., P_s$ соответственно. *Гипотезой согласованности люсианов* называют гипотезу $P_1 = P_2 = ...= P_s$.

Случайные толерантности - частный случай люсианов [170]. Для других видов бинарных отношений, широко используемых в экспертных технологиях, - ранжировок и разбиений - под согласованностью понимают более частную гипотезу, предполагающую отрицание равномерности распределений (т.е. одинаковой вероятности появления каждой возможной ранжировки или разбиения), что соответствует замене гипотезы согласованности на гипотезу равномерности $P_1 = P_2 = ...= P_s = (1/2, 1/2, ..., 1/2)$. Гипотеза согласованности более адекватна конкретным задачам обработки данных опросов или экспертных оценок, чем гипотеза равномерности. Поэтому реальные данные, обычно содержащие противоречия, целесообразно рассматривать как люсианы и проверять гипотезу согласованности, а не подбирать ближайшие ранжировки или разбиения с дальнейшей проверкой согласованности методами теории случайных ранжировок или разбиений.

Пусть $A_1, A_2, ..., A_m$ и $B_1, B_2, ..., B_n$ - независимые в совокупности люсианы длины k, одинаково распределенные в каждой группе с параметрами $P(A)$ и $P(B)$ соответственно. *Гипотезой однородности* называют гипотезу $P(A) = P(B)$.

Пусть (A_i, B_i), $i = 1. 2, ..., s$ - последовательность (фиксированной длины) пар люсианов. Пары предполагаются независимыми между собой. Требуется проверить гипотезу независимости A_i и B_i, т.е. внутри пар. В ранее введенных обозначениях *гипотеза независимости* - это гипотеза $P(X_{ij}(A) = 1, X_{ij}(B) = 1) = P(X_{ij}(A) = 1)P(X_{ij}(B) = 1)$, где $i = 1, ..., s$; $j = 1, ..., k$, проверяемая в предположении $P_1(A) = P_2(A) = ... = P_s(A)$, $P_1(B) = P_2(B) = ... = P_s(B)$.

В последние десятилетия (с начала 1970-х годов) в прикладной статистике все большее распространение получают постановки, в которых число неизвестных параметров растет вместе с объемом выборки. Результаты, полученные в подобных постановках, называют найденными «в асимптотике растущей размерности» или «в асимптотике А.Н. Колмогорова», перенося терминологию исследований по дискриминантному анализу на общий случай. Эта асимптотика естественна при обработке многих видов технических, организационно-экономических, социологических данных. В теории люсианов используем асимптотику растущей размерности $s = \text{const}$, $k \to \infty$. При проверке однородности принимаем, что m и n постоянны, а $k \to \infty$. Число неизвестных параметров растет пропорционально объему данных.

Для проверки рассматриваемых гипотез применяем разработанный нами метод, основанный на использовании несмещенных оценок, построенных по малым выборкам [170]. Исходят из вектора попарных расстояний между люсианами $\xi = \{d(A_p, A_q), 1 \le p < q \le s\}$, в котором пары индексов (p, q) упорядочены лексикографически, а расстояние $d(A_p, A_q)$ - число несовпадающих координат в векторах A_p и A_q.

Исследования по теории люсианов, в том числе выполненные нашими учениками Г.В. Рыдановой, Т.Н. Дылько, Г.В. Раушенбахом, О.В. Филипповым, А.М. Никифоровым, рассмотрены в монографиях [170, 200, 210]. Методы моделирования и анализа данных опросов и экспертных мнений, основанные на теории люсианов, заслуживают теоретического развития и широкого использования в практике принятия решений [137], социологии, в маркетинговых исследованиях, управлении персоналом и иных областях применения экспертных оценок [213].

Нечеткость и случайность. С самого начала появления современной теории нечеткости в 1960-е годы [74, 387] началось обсуждение ее взаимоотношений с теорией вероятностей. Дело в том, что функция принадлежности нечеткого множества напоминает распределение вероятностей. Отличие состоит только в том, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины (или интеграл, если множество возможных значений несчетно) всегда равна 1, а сумма S значений функции принадлежности (в непрерывном случае – интеграл от функции принадлежности) может быть любым неотрицательным числом. Возникает искушение пронормировать функцию принадлежности, т.е. разделить все ее значения на S (при $S \neq 0$), чтобы свести ее к распределению вероятностей (или к плотности вероятности). Однако специалисты по нечеткости справедливо возражают против такого «примитивного» сведения, поскольку оно проводится отдельно для каждой размытости (нечеткого множества), и определения обычных операций над нечеткими множествами с ним согласовать нельзя. Последнее утверждение означает следующее. Пусть указанным образом преобразованы функции принадлежности нечетких множеств A и B. Как при этом преобразуются функции принадлежности $A \cap B, A \cup B, A + B, AB$? Установить это *невозможно в принципе.* Последнее утверждение становится совершенно ясным после рассмотрения нескольких примеров пар нечетких множеств с одними и теми же суммами значений функций принадлежности, но различными результатами теоретико-множественных операций над ними. Причем и суммы значений соответствующих функций принадлежности для этих результатов теоретико-множественных операций, (например, для пересечений множеств), также различны.

В работах по нечетким множествам время от времени утверждается, что теория нечеткости является самостоятельным разделом прикладной математики и не имеет отношения к теории вероятностей (см., например, обзор литературы в [170, 171]). Некоторые авторы, сравнивавшие теорию нечеткости и теорию вероятностей, подчеркивали различие между этими областями теоретических и прикладных исследований. Обычно сравнивают аксиоматику и сравнивают области приложений. Надо сразу отметить, что аргументы при втором типе сравнений не имеют доказательной силы, поскольку по поводу границ применимости даже такой давно выделившейся научной области, как вероятностно-статистические методы, имеются различные мнения. Напомним, что итог рассуждений одного из известных математиков А. Лебега по поводу границ применимости арифметики таков: «Арифметика применима тогда, когда она применима» [114].

При сравнении различных аксиоматик теории нечеткости и теории вероятностей нетрудно увидеть, что списки аксиом различаются. Из этого, однако, отнюдь не следует, что между указанными теориями нельзя установить связь, типа известного сведения евклидовой геометрии на плоскости к арифметике (точнее к теории числовой системы R^2). Две аксиоматики – евклидовой геометрии и арифметики – сильно различаются.

Проекция случайного множества. Теория нечетких множеств тесно связана с теорией случайных множеств. Нечеткие множества естественно рассматривать как «проекции» случайных множеств.

Определение 7. Пусть $A = A(\omega)$ – случайное подмножество конечного множества *У*. Нечеткое множество *B,* определенное на *У,* называется проекцией *A* и обозначается *Proj A,* если

$$\mu_B(y) = P(y \in A) \qquad (4.25)$$

при всех $y \in Y$.

Очевидно, каждому случайному множеству A можно поставить в соответствие с помощью формулы (4.25) нечеткое множество $B = Proj\ A$. Оказывается, верно и обратное.

Для любого нечеткого подмножества В конечного множества У существует случайное подмножество А множества У такое, что В = Proj А.

Достаточно задать распределение случайного множества A. Пусть $У_1$ – носитель B (т.е. совокупность элементов, для которых функция принадлежности положительна). Без ограничения общности можно считать, что $Y_1 = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ при некотором m и элементы $У_1$ занумерованы в таком порядке, что

$$0 < \mu_B(y_1) \le \mu_B(y_2) \le ... \le \mu_B(y_m)$$

Введем множества

$$Y(1) = Y_1, Y(2) = \{y_2, ..., y_m\}, ..., Y(t) = \{y_t, ..., y_m\}, ..., Y(m) = \{y_m\}.$$

Положим

$$P(A = Y(1)) = \mu_B(y_1),\ P(A = Y(2)) = \mu_B(y_2) - \mu_B(y_1), ...,$$

$$P(A = Y(t) = \mu_B(y_t) - \mu_B(y_{t-1}), ..., P(A = Y(m) = \mu_B(y_m) - \mu_B(y_{m-1}),$$

$$P(A = \varnothing) = 1 - \mu_B(y_m).$$

Для всех остальных подмножеств X множества $У$ положим $P(A=X)=0$. Поскольку элемент y_t входит во множества $Y(1)$, $Y(2)$,…, Y(t) и не входит во множества $Y(t+1)$,…, $Y(m)$, то из приведенных выше формул следует, что $P(y_t \in A) = \mu_B(y_t)$. Если $y \notin Y_1$, то, очевидно, $P(y \in A) = 0.$.

Основной результат о сведении теории нечетких множеств к теории случайных множеств дается следующим утверждением [170, 370].

Пусть B_1, B_2, B_3, ..., B_t – некоторые нечеткие подмножества множества $У$ из конечного числа элементов. Рассмотрим результаты последовательного выполнения теоретико-множественных операций

$$B^m = ((...((B_1 \circ B_2) \circ B_3) \circ ...) \circ B_{m-1}) \circ B_m,\ m = 1, 2, ..., t,$$

где $\circ$ – символ одной из следующих теоретико-множественных операций над нечеткими множествами: пересечение, произведение, объединение, сумма (на разных местах могут стоять разные символы). Тогда существуют случайные подмножества $A_1, A_2, A_3, ..., A_t$ того же множества $У$ такие, что

$$Proj\ A_i = B_i,\ i = 1, 2, ..., t,$$

и, кроме того, результаты теоретико-множественных операций связаны аналогичными соотношениями

$$Proj\{((...((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \otimes ...) \otimes A_{m-1}) \otimes A_m\} = B^m,\ m = 1, 2, ..., t,$$

где знак $\otimes$ означает, что на рассматриваемом месте стоит символ пересечения $\cap$ случайных множеств, если в определении B^m стоит символ пересечения или символ произведения нечетких множеств, и соответственно символ объединения $\cup$ случайных множеств, если в B^m стоит символ объединения или символ суммы нечетких множеств.

Итак, описаны связи между такими объектами нечисловой природы, как нечеткие и случайные множества, установленные в нашей стране в первой половине 1970-х гг. Через несколько лет, а именно, в начале 1980-х годов, близкие подходы стали развиваться и за рубежом. Одна из работ [359] носит примечательное название «Нечеткие множества как классы эквивалентности случайных множеств».

В прикладной статистике и эконометрике [200, 210] разработан ряд методов статистического анализа нечетких данных. В том числе методы классификации, регрессии, проверки гипотез о совпадении функций принадлежности по опытным данным и т.д. При этом оказались полезными общие подходы статистики объектов нечисловой природы. Некоторые применения, в частности, в управлении инновациями, рассмотрены в главе 5 (см. также [108, 295]).

Самый простой вид нечеткого множества – интервал, левее левого конца и правее правого конца которого функция принадлежности равна 0, а для точек самого интервала равна 1. Статистические методы анализа подобных объектов – интервальных данных – обладают рядом особенностей.

4.4. Разработка методов статистики интервальных данных

В статистике интервальных данных элементы выборки — не числа, а интервалы. Это приводит к алгоритмам и выводам, принципиально отличающимся от классических. Настоящий раздел посвящен основным идеям и подходам асимптотической статистики интервальных данных [210, 213].

Необходимо изучение устойчивости (робастности) оценок параметров к малым отклонениям исходных данных и предпосылок модели [361]. Однако популярная среди теоретиков модель засорения (Тьюки-Хьюбера) представляется не вполне адекватной. Эта модель нацелена на изучение влияния больших «выбросов». Поскольку любые реальные измерения лежат в некотором фиксированном диапазоне, а именно, заданном в техническом паспорте средства измерения, то зачастую выбросы не могут быть слишком большими. Поэтому представляются полезными иные, более общие схемы устойчивости, введенные в монографии [170], в которых, например, учитываются отклонения распределений результатов наблюдений от предположений модели.

В одной из таких схем изучается влияние интервальности исходных данных на статистические выводы. Необходимость такого изучения стала очевидной следующим образом. В государственных стандартах СССР по прикладной статистике в обязательном порядке давалось справочное приложение «Примеры применения правил стандарта». При разработке ГОСТ 11.011-83 [56] нам были переданы для анализа реальные данные о наработке резцов до предельного состояния (в часах). Оказалось, что все эти данные представляли собой либо целые числа, либо полуцелые (т.е. после умножения на 2 становящиеся целыми). Ясно, что исходная длительность наработок искажена. Необходимо учесть в статистических процедурах наличие такого искажения исходных данных. Как это сделать?

Обсудим модель группировки данных, согласно которой для истинного значения X проводится замена на ближайшее число из множества $\{0{,}5n,\ n = 1, 2, 3, ...\}$. Однако эту модель целесообразно подвергнуть сомнению, а также рассмотреть иные модели. Так, возможно, что X надо приводить к ближайшему сверху элементу указанного множества — если проверка качества поставленных на испытание резцов проводилась раз в полчаса. Другой вариант: если расстояния от X до двух ближайших элементов множества $\{0{,}5n,\ n = 1, 2, 3, ...\}$ примерно равны, то естественно ввести рандомизацию при выборе заменяющего числа, и т.д.

Целесообразно построить новую математико-статистическую модель, согласно которой **результаты наблюдений — не числа, а интервалы**. Например, если в таблице приведено значение 53,5, то это значит, что реальное значение — какое-то число от 53,0 до 54,0, т.е. какое-то число в интервале [53,5 – 0,5; 53,5 + 0,5], где 0,5 — максимально возможная погрешность. Принимая эту модель, мы попадаем в новую научную область — статистику интервальных данных, идейно связанную с интервальной математикой, в которой в роли чисел выступают интервалы (см., например, [343]). Это направление математики является дальнейшим развитием правил приближенных вычислений, посвященных выражению погрешностей суммы, разности, произведения, частного через погрешности тех чисел, над которыми осуществляются перечисленные операции.

В интервальной математике сумма двух интервальных чисел $[a, b]$ и $[c, d]$ имеет вид $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$, а разность определяется по формуле $[a, b] – [c, d] = [a – d, b – c]$. Для положительных a, b, c, d произведение определяется формулой $[a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd]$, а частное имеет вид $[a, b]/[c, d] = [a/d, b/c]$. Эти формулы получены при решении соответствующих оптимизационных задач. Пусть x лежит в отрезке $[a, b]$, а y — в отрезке [c, d]. Каково минимальное и максимальное значение для $x + y$? Очевидно, $a + c$ и $b + d$ соответственно. Минимальные и максимальные значения для $x - y$, xy, x/y указывают нижние и верхние границы для интервальных чисел, задающих результаты арифметических операций. А от арифметических операций можно перейти ко всем остальным математическим алгоритмам. Так строится интервальная математика.

Исследователям удалось решить ряд задач теории интервальных дифференциальных уравнений, в которых коэффициенты, начальные условия и решения описываются с помощью интервалов. Мы развиваем асимптотические методы статистического анализа интервальных данных при больших объемах выборок и малых погрешностях измерений. В отличие от классической математической статистики, сначала устремляется к бесконечности объем выборки и только потом — уменьшаются до нуля погрешности. В частности, с помощью такой асимптотики сформулированы правила выбора метода оценивания в ГОСТ 11.011-83.

Разработана общая схема исследования, включающая расчет нотны (максимально возможного отклонения статистики, вызванного интервальностью исходных данных) и рационального объема выборки (превышение которого не дает существенного повышения точности оценивания). Она применена к оцениванию математического ожидания и дисперсии, медианы и коэффициента вариации, параметров гамма-распределения и характеристик аддитивных статистик, при проверке гипотез о параметрах нормального распределения, в т.ч. с помощью критерия Стьюдента, а также гипотезы однородности с помощью критерия Смирнова. Изучено асимптотическое поведение оценок метода моментов и оценок максимального правдоподобия (а также более общих — оценок минимального контраста), проведено асимптотическое сравнение этих методов в случае интервальных данных, найдены общие условия, при которых, в отличие от классической математической статистики, метод моментов дает более точные оценки, чем метод максимального правдоподобия.

Разработаны подходы к рассмотрению интервальных данных в основных постановках регрессионного, дискриминантного и кластерного анализов. Изучено влияние погрешностей измерений и наблюдений на свойства алгоритмов регрессионного анализа, разработаны способы расчета нотн и рациональных объемов выборок, введены и исследованы новые понятия многомерных и асимптотических нотн, доказаны соответствующие предельные теоремы. Начата разработка интервального дискриминантного анализа, рассмотрено влияние интервальности данных на показатель качества классификации. Полученные результаты сведены в [210, 213].

По нашему мнению, со временем во все виды статистического программного обеспечения должны быть включены алгоритмы интервальной статистики, «параллельные» обычно используемым алгоритмам прикладной математической статистики. Это позволит в явном виде учесть наличие погрешностей у результатов наблюдений, сблизить позиции метрологов и статистиков.

Многие из утверждений статистики интервальных данных отличаются от аналогов из классической математической статистики. В частности, не существует состоятельных оценок; средний квадрат ошибки оценки, как правило, асимптотически равен сумме дисперсии оценки, рассчитанной согласно классической теории, и некоторого положительного числа (равного квадрату т.н. нотны — максимально возможного отклонения значения статистики из-за погрешностей исходных данных) — в результате, метод моментов оказывается иногда точнее метода максимального правдоподобия [375]; нецелесообразно увеличивать объем выборки сверх некоторого предела (называемого рациональным объемом выборки) — вопреки классической теории, согласно которой чем больше объем выборки, тем точнее выводы.

Другое направление в области статистики интервальных данных — это школа проф. А.П. Вощинина, активно работающая с конца 70-х годов. Полученные результаты отражены в ряде монографий ([35, 36]), статей [37, 38], научных докладов, диссертаций. Изучены проблемы регрессионного анализа, планирования эксперимента, сравнения альтернатив и принятия решений в условиях интервальной неопределенности.

Рассматриваемое ниже наше научное направление отличается нацеленностью на асимптотические результаты, полученные при больших объемах выборок и малых погрешностях измерений, поэтому оно и названо ***асимптотической статистикой интервальных данных.***

Сформулируем сначала основные идеи асимптотической математической статистики интервальных данных.

Пусть существо реального явления описывается выборкой x_1, x_2, ..., x_n. В вероятностной теории математической статистики, из которой мы исходим, выборка — это набор независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин. Однако анализ подавляющего большинства реальных задач показывает, что статистику известна отнюдь не выборка x_1, x_2, ..., x_n, а величины

$y_j = x_j + \varepsilon_j$, $j = 1, 2, ..., n$,

где ε_1, ε_2, …, ε_n — некоторые погрешности измерений, наблюдений, анализов, опытов, исследований (например, инструментальные ошибки).

Одна из причин появления погрешностей — запись результатов наблюдений с конечным числом значащих цифр. Дело в том, что для случайных величин с непрерывными функциями распределения событие, состоящее в попадании хотя бы одного элемента выборки в множество рациональных чисел, согласно правилам теории вероятностей имеет вероятность 0, а такими событиями в теории вероятностей принято пренебрегать.

Поэтому при рассуждениях о выборках из нормального, логарифмически нормального, экспоненциального, равномерного, гамма-распределений, распределения Вейбулла-Гнеденко и др. приходится принимать, что эти распределения имеют элементы исходной выборки $x_1, x_2, ..., x_n$, в то время как статистической обработке доступны лишь искаженные значения $y_j = x_j + \varepsilon_j$.

Введем обозначения

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)$.

Пусть статистические выводы основываются на статистике $f : R^n \to R^1$, используемой для оценивания параметров и характеристик распределения, проверки гипотез и решения иных статистических задач. Принципиально важная для статистики интервальных данных идея такова: СТАТИСТИК ЗНАЕТ ТОЛЬКО $f(y)$, НО НЕ $f(x)$.

Очевидно, в статистических выводах необходимо отразить различие между $f(y)$ и $f(x)$. Одним из двух основных понятий статистики интервальных данных является понятие нотны.

Определение 10. Величину максимально возможного (по абсолютной величине) отклонения, вызванного погрешностями наблюдений ε, известного статистику значения $f(y)$ от истинного значения $f(x)$, т.е.

$N_f(x) = \sup | f(y) - f(x) |$,

где супремум берется по множеству возможных значений вектора погрешностей ε (см. ниже), будем называть *нотной*.

Если функция f имеет частные производные второго порядка, а ограничения на погрешности имеют вид

$| \varepsilon_i | \le \Delta, i = 1, 2, \ldots, n,$ (4.26)

причем Δ мало, то приращение функции f с точностью до бесконечно малых более высокого порядка описывается главным линейным членом, т.е.

$$f(y) - f(x) = \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \varepsilon_i + O(\Delta^2).$$

Чтобы получить асимптотическое (при $\Delta \to 0$) выражение для нотны, достаточно найти максимум и минимум линейной функции (главного линейного члена) на кубе, заданном неравенствами (4.26). Легко видеть, что максимум достигается, если положить

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \Delta, & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} \geq 0, \\ -\Delta, & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} < 0, \end{cases}$$

а минимум, отличающийся от максимума только знаком, достигается при $\varepsilon_i' = -\varepsilon_i$. Следовательно, *нотна* с точностью до бесконечно малых более высокого порядка имеет вид

$$N_f(x) = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| \right) \Delta.$$

Это выражение назовем *асимптотической нотной*.

Условие (4.26) означает, что исходные данные представляются статистику в виде интервалов $[y_i - \Delta; y_i + \Delta]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (отсюда и название этого научного направления). Ограничения на погрешности могут задаваться разными способами — кроме абсолютных ошибок используются относительные или иные показатели различия между x и y.

Если задана не предельная абсолютная погрешность Δ, а предельная относительная погрешность δ, т.е. ограничения на погрешности вошедших в выборку результатов измерений имеют вид

$|\varepsilon_i| \leq \delta |x_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

то аналогичным образом получаем, что нотна с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, т.е. асимптотическая нотна, имеет вид

$$N_f(x) = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \left| x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| \right) \delta.$$

При практическом использовании рассматриваемой концепции необходимо провести тотальную замену символов x на символы y. В каждом конкретном случае удается показать, что в силу малости погрешностей разность $N_f(y) - N_f(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка сравнительно с $N_f(x)$ или $N_f(y)$.

Основные результаты в вероятностной модели. В классической вероятностной модели элементы исходной выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ рассматриваются как независимые одинаково распределенные случайные величины. Как правило, существует некоторая константа $C > 0$ такая, что в смысле сходимости по вероятности

$$\lim_{n\to\infty} N_f(x) = C\Delta. \qquad (4.27)$$

Соотношение (4.27) доказывается отдельно для каждой конкретной задачи.

При использовании классических статистических методов в большинстве случаев используемая статистика $f(x)$ является асимптотически нормальной. Это означает, что существуют константы a и σ^2 такие, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\,\frac{f(x)-a}{\sigma} < x\right) = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Обычно оказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(Mf(x)-a) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} nDf(x) = \sigma^2,$$

а потому в классической математической статистике средний квадрат ошибки статистической оценки равен

$$M(f(x)-a)^2 = (Mf(x)-a)^2 + Df(x) = \frac{\sigma^2}{n}$$

с точностью до членов более высокого порядка. В статистике интервальных данных ситуация иная — обычно можно доказать, что средний квадрат ошибки равен

$$\max_{\{\varepsilon\}} M(f(x)-a)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + N_f^2(y) + o\left(\Delta^2 + \frac{1}{n}\right). \qquad (4.28)$$

Из соотношения (4.28) вытекает ряд важных следствий. Правая часть этого равенства, в отличие от правой части соответствующего классического равенства, не стремится к 0 при безграничном возрастании объема выборки. Она остается больше некоторого положительного числа, а именно, квадрата нотны. Следовательно, статистика $f(x)$ не является состоятельной оценкой параметра a. Более того, состоятельных оценок вообще не существует.

Пусть доверительным интервалом для параметра a, соответствующим заданной доверительной вероятности γ, в классической математической статистике является интервал $(c_n(\gamma); d_n(\gamma))$. В статистике интервальных данных аналогичный доверительный интервал является более широким. Он имеет вид $(c_n(\gamma) - N_f(y); d_n(\gamma) + N_f(y))$. Таким образом, его длина увеличивается на две нотны. Следовательно, при увеличении объема выборки длина доверительного интервала не может стать меньше, чем $2C\Delta$ (см. формулу (4.27)).

В статистике интервальных данных методы оценивания параметров имеют другие свойства по сравнению с классической математической статистикой. Так, при больших объемах выборок метод моментов может быть заметно лучше, чем метод максимального правдоподобия (т.е. иметь меньший средний квадрат ошибки — см. формулу (4.28)), в то время как в классической математической статистике второй из названных методов всегда не хуже первого.

Рациональный объем выборки. Анализ формулы (4.28) показывает, что в отличие от классической математической статистики нецелесообразно безгранично увеличивать объем выборки, поскольку средний квадрат ошибки остается всегда большим квадрата нотны. Поэтому представляется полезным ввести понятие «рационального объема выборки» n_{rat}, при достижении которого продолжать наблюдения нецелесообразно.

Как установить «рациональный объем выборки»? Можно воспользоваться идеей «принципа уравнивания погрешностей», выдвинутой в [170]. Речь идет о том, что вклад погрешностей различной природы в общую погрешность должен быть примерно одинаков. Этот принцип дает возможность выбирать необходимую точность оценивания тех или иных характеристик в тех случаях, когда это зависит от исследователя. В статистике интервальных данных в соответствии с «принципом уравнивания погрешностей» предлагается определять рациональный объем выборки n_{rat} из условия равенства двух величин — метрологической составляющей, связанной с нотной, и статистической составляющей — в среднем квадрате ошибки (4.28), т.е. из условия

$$\frac{\sigma^2}{n_{rat}} = N_f^2(y),\ n_{rat} = \frac{\sigma^2}{N_f^2(y)}.$$

Для практического использования выражения для рационального объема выборки неизвестные теоретические характеристики необходимо заменить их оценками. Это делается в каждой конкретной задаче по-своему.

Исследовательскую программу в области статистики интервальных данных можно «в двух словах» сформулировать так: для любого алгоритма анализа данных (алгоритма прикладной статистики) необходимо вычислить нотну и рациональный объем выборки [378]. Или иные величины из того же понятийного ряда, возникающие в многомерном случае, при наличии нескольких выборок и при иных обобщениях описываемой здесь простейшей схемы. Затем проследить влияние погрешностей исходных данных на точность оценивания, доверительные интервалы, значения статистик критериев при проверке гипотез, уровни значимости и другие характеристики статистических выводов. Очевидно, классическая математическая статистика является частью статистики интервальных данных, выделяемой условием $\Delta = 0$.

Статистика интервальных данных – основа кандидатских диссертаций по экономическим наукам Д.Н. Алешина «Экономическое обоснование эффективности инвестиционных проектов на предприятиях на основе применения эконометрического метода интервальной оценки» [1] и Е.А. Гуськовой «Разработка организационно-экономических методов повышения эффективности деятельности промышленного предприятия на основе эконометрического подхода» [59], выполненных под руководством автора настоящей диссертационной работы.

Интересные теоретически и полезные практически результаты в статистике объектов нечисловой природы получены многими авторами (см. список литературы из 132 названий в [178] и из 150 названий в [226]). Укажем на обзоры [373, 379], а из недавних работ - на статьи [10, 19, 37, 38, 209, 296, 297].

Глава 5. Устойчивые математические методы и модели в функциональных областях деятельности предприятий

5.1. Экспертные технологии информационно-аналитической поддержки процессов принятия решений

Экспертные технологии на основе статистики объектов нечисловой природы являются более устойчивыми по сравнению с технологиями на основе количественных экспертных оценок, поскольку, «как показали многочисленные опыты, человек более правильно (и с меньшими затруднениями) отвечает на вопросы качественного, например, - сравнительного, характера, чем количественного» [4].

Экспертные технологии разработки управленческих решений. Для решения различных задач модернизации с целью повышения эффективности процессов управления предприятиями и организациями рекомендуем использовать экспертные технологии разработки управленческих решений. В [183, 200] выделены основные стадии проведения экспертного исследования. Предложена классификация экспертных технологий по таким показателям, как число туров (один, несколько, не фиксировано), порядок вовлечения экспертов (одновременно, последовательно), способ учета их мнений (с весами, без весов), организации общения экспертов (без общения, анонимное, заочное, очное с ограничениями или без ограничений). Нами разработаны новые экспертные технологии, в частности, метод построения итоговой кластеризованной ранжировки на основе одновременного использования метода средних арифметических рангов и метода медиан рангов, а затем процедуры согласования. Разработаны новые модели и методы в непараметрической теории парных сравнений (теории люсианов) и теории случайных толерантностей.

Методы экспертных оценок - это методы организации работы со специалистами-экспертами и обработки мнений экспертов. Эти мнения обычно выражены частично в количественной, частично в качественной формах. Экспертные исследования проводят с целью подготовки информации для лица, принимающего решения (ЛПР). Для проведения работы по методу экспертных оценок создают Рабочую группу (сокращенно РГ), которая организует по поручению ЛПР деятельность экспертов, объединенных в экспертную комиссию (ЭК).

Рассмотрим несколько конкретных процедур экспертных оценок.

Метод экспертных упорядочений разработан нами [55, 200] по программе работ по уничтожению химического оружия (при поддержке МНТЦ (проект № 317) и РФФИ (проект 97-06-80033)). Эксперты дают ответы в виде кластеризованных ранжировок. Рассчитывают две итоговые ранжировки – по методу средних арифметических рангов и по методу медиан рангов, а затем проводят их согласования по специально разработанному алгоритму, позволяющему выделить общее в этих двух ранжировках, а противоречия поместить внутрь кластеров окончательной ранжировки.

Метод Дельфи. Название дано по ассоциации с Дельфийским храмом, куда согласно древнегреческому обычаю было принято обращаться для получения поддержки при принятии решений. В США в 1960-х гг. методом Дельфи назвали экспертную процедуру прогнозирования научно-технического развития. В первом туре эксперты называли вероятные даты тех или иных будущих свершений. Во втором туре каждый эксперт знакомился с прогнозами всех остальных. Если его прогноз сильно отличался от прогнозов основной массы, его просили пояснить свою позицию, и иногда он изменял свои оценки, приближаясь к средним значениям. Процедуру повторяли, пока средние значения не переставали меняться. Эти средние значения и выдавались заказчику как групповое мнение.

Метод сценариев применяется прежде всего для экспертного прогнозирования. Прогнозирование может быть успешным лишь при некоторой стабильности условий. Однако решения органов власти, отдельных лиц, иные события меняют условия, и события развиваются по-иному, чем ранее предполагалось. Например, при разработке методологического, программного и информационного обеспечения анализа риска химико-технологических проектов необходимо составить детальный каталог сценариев аварий, связанных с утечками токсических химических веществ. Каждый из таких сценариев описывает аварию своего типа, со своим индивидуальным происхождением, развитием, последствиями, возможностями предупреждения. Метод сценариев - это метод декомпозиции задачи прогнозирования, предусматривающий выделение набора отдельных вариантов развития событий (сценариев), в совокупности охватывающих все возможные варианты развития. При этом каждый отдельный сценарий должен допускать возможность достаточно точного прогнозирования, а общее число сценариев должно быть обозримо.

Возможность подобной декомпозиции не очевидна. При применении метода сценариев необходимо осуществить два этапа исследования:

- построение исчерпывающего, но обозримого набора сценариев;

- прогнозирование в рамках каждого конкретного сценария с целью получения ответов на интересующие исследователя вопросы.

Каждый из этих этапов лишь частично формализуем. Существенная часть рассуждений проводится на качественном уровне, поскольку стремление к излишней формализации и математизации приводит к искусственному внесению определенности там, где ее нет по существу, либо к использованию громоздкого математического аппарата. Так, рассуждения на словесном уровне считаются доказательными в большинстве ситуаций, в то время как попытка уточнить смысл используемых слов с помощью, например, теории нечетких множеств приводит к громоздким математическим моделям. Набор сценариев должен быть обозрим. Приходится исключать различные маловероятные события. Само по себе создание набора сценариев - предмет экспертного исследования. Кроме того, эксперты могут оценить вероятности реализации того или иного сценария. Прогнозирование в рамках каждого конкретного сценария с целью получения ответов на интересующие исследователя вопросы осуществляется в соответствии с методологией прогнозирования [214]. При стабильных условиях могут быть применены статистические методы прогнозирования временных рядов. Однако этому предшествует анализ с помощью экспертов, причем зачастую прогнозирование на словесном уровне является достаточным (для получения интересующих исследователя и ЛПР выводов) и не требующим количественного уточнения. Примером является проведенное нами на заданию структур Минобороны РФ исследование на основе сценариев социально-экономического развития России [191, 193].

Другой вариант метода сценариев применяют при составлении бизнес-планов. Финансовый поток инвестиционного проекта рассматривают как вероятный. Оптимистический сценарий соответствует тому, что поступления увеличиваются на определенный процент, например, на 10%, а платежи - уменьшают на 10%. В пессимистическом сценарии, наоборот, поступления уменьшаются на определенный процент, например, на 10%, а платежи - увеличиваются на 10%. Затем рассчитывают характеристики инвестиционного проекта, соответствующие трем сценариям, и сопоставляют их между собой, чтобы получить представление об устойчивости этих характеристик.

Используют многие иные экспертные технологии, в частности, *«Мозговой штурм»*. Информация о них приведена в работах [113, 117, 118, 119, 120, 128, 153, 183, 213, 243, 276, 277, 278, 284, 286, 287, 335, 384, 385, 341, 349].

При планировании экспертного исследования на стадии разработки сценария сбора и анализа данных может оказаться полезным использовать разнообразные формы получения информации от экспертов. Наряду с числовыми оценками (измерения в шкалах отношений или интервалов) могут быть получены баллы или ранги (измерения в порядковых шкалах), бинарные отношения (разбиения, кластеризованные ранжировки, толерантности), множества и другие объекты нечисловой природы.

Разберем важный для прикладных исследований класс экспертных технологий, основанный на применении медианы Кемени.

Медиана Кемени и экспертные оценки. Рассмотрим пространство бинарных отношений на конечном множестве $Q=\{q_1, q_2, ..., q_k\}$ и его подпространства. Бинарное отношение A можно описать матрицей $||a(i,j)||$ из 0 и 1, причем $a(i,j) = 1$ тогда и только тогда q_i и q_j находятся в отношении A, и $a(i,j) = 0$ в противном случае.

Определение 1. Расстоянием Кемени между бинарными отношениями A и B, описываемыми матрицами $||a(i,j)||$ и $||b(i,j)||$ соответственно, называется

$$d(A,B)=\sum_{i,j=1}^{k}|\,a(i,j)-b(i,j)\,|.$$

Иногда оказывается полезным использование вместо расстояние Кемени метрики подобия [374].

Определение 2. Медианой Кемени для выборки, состоящей из бинарных отношений, называется эмпирическое среднее, построенное с помощью расстояния Кемени.

Замечание. В определение медианы Кемени входит множество, по которому проводится минимизация. Сам Дж. Кемени рассматривал минимизацию по пространству упорядочений [88]. Можно минимизировать по пространству отношений эквивалентности или по пространству отношений толерантности, по всем бинарным отношениям, а также по иным множествам, например, по совокупности ответов экспертов – тогда медианой Кемени будет мнение того эксперта, который оказался «в центре» мнений членов экспертной комиссии.

Поскольку число бинарных отношений на конечном множестве конечно, то эмпирические и теоретические средние для произвольных показателей различия существуют и справедливы законы больших чисел, сформулированные в разделе 4.2.

Медиана Кемени, т.е. эмпирическое среднее, описывает итоговое мнение комиссии экспертов, а установленный выше закон больших чисел в пространствах произвольной природы показывает, что это итоговое мнение устойчиво приближается к наиболее адекватному, несмотря на различия в ответах экспертов.

Бинарные отношения, в частности, упорядочения, часто используются для описания мнений экспертов. Тогда расстояние Кемени измеряет близость мнений экспертов, а медиана Кемени позволяет находить итоговое усредненное мнение комиссии экспертов. Расчет медианы Кемени обычно включают в информационное обеспечение систем принятия решений с использованием оценок экспертов. Речь идет, например, о математическом обеспечении разработанного под нашим руководством автоматизированного рабочего места «Математика в экспертизе» (АРМ «МАТЭК»), предназначенного, в частности, для использования при проведении экспертиз в задачах экологического страхования [231]. Поэтому представляет большой практический интерес численное изучение свойств медианы Кемени при конечном объеме выборки. Такое изучение дополняет описанную выше асимптотическую теорию, в которой объем выборки предполагается безгранично возрастающим ($n \to \infty$).

Компьютерное изучение свойств медианы Кемени при конечных объемах выборок. С помощью специально разработанной программной системы В.Н. Жихарев провел ряд серий численных экспериментов по изучению свойств выборочных медиан Кемени [229]. Представление о полученных результатах дается табл.5.1. В каждой серии методом статистических испытаний определенное число раз моделировался случайный и независимый выбор одинаково распределенных экспертных ранжировок, а затем находились все медианы Кемени для смоделированного набора мнений экспертов. При этом в сериях 1 - 5 распределение ответа эксперта предполагалось равномерным на множестве всех ранжировок. В серии 6 это распределение являлось монотонным относительно расстояния Кемени с некоторым центром, т.е. вероятность выбора определенной ранжировки убывала с увеличением расстояния Кемени этой ранжировки от центра. Таким образом, серии 1 - 5 соответствуют ситуации, когда у экспертов нет почвы для согласия, нет группировки их мнений относительно некоторого единого среднего группового мнения, в то время как в серии 6 есть единое мнение - описанный выше центр, к которому тяготеют ответы экспертов.

Таблица 5.1

Вычислительный эксперимент по изучению медианы Кемени

Номер серии	1	2	3	4	5	6
Число испытаний	100	1000	50	50	1000	1000
Количество объектов	5	5	7	7	5	5
Количество экспертов	10	30	10	30	10	10
Частота непустого пересечения	0,85	0,58	0,52	0,2	0,786	0,911
Среднее отношение диаметров	0.283	0,124	0,191	0,089	0,202	0.044
Средняя мощность медианы	5,04	2,41	6,4	2,88	3,51	1,35
Максимальная. мощность медианы	30	14	19	11	40	12

Обсудим результаты, приведенные в табл.5.1. Неожиданным явилось большое число элементов в выборочной медиане Кемени - как среднее, так и особенно максимальное. Одновременно обращает на себя внимание убывание этих чисел при росте числа экспертов и особенно при переходе к ситуации реального существования группового мнения (серия 6). Достаточно часто один из ответов экспертов входит в медиану Кемени (т.е. пересечение множества ответов экспертов и медианы Кемени непусто), а диаметр медианы как множества в пространстве ранжировок заметно меньше диаметра множества ответов экспертов. По этим показателям - наилучшее положение в серии 6. Грубо говоря, всяческие «патологии» в поведении медианы Кемени наиболее резко проявляются в ситуации, когда ее применение не имеет содержательного обоснования, т.е. когда у экспертов нет основы для согласия, их ответы равномерно распределены на множестве ранжировок.

Увеличение числа испытаний в 10 раз при переходе от серии 1 к серии 5 не очень сильно повлияло на приведенные в таблице характеристики, поэтому представляется, что суть дела выявляется при числе испытаний (в методе Монте-Карло), равном 100 или даже 50. Увеличение числа объектов или экспертов увеличивает число элементов в рассматриваемых пространствах ранжировок, а потому уменьшается частота попадания какого-либо из мнений экспертов внутрь медианы Кемени. А также отношение диаметра медианы к диаметру множества экспертов и число элементов медианы Кемени (среднее и максимальное). Можно сказать, что увеличение числа объектов или экспертов уменьшает степень дискретности задачи, приближает ее к непрерывному случаю, а потому уменьшает выраженность различных «патологий».

Различные варианты медианы Кемени. Согласно [31], медиана Кемени – это эмпирическое среднее $x_{cp} = E_n(f) = E_n(x_1, x_2, x_3,...,x_n; f)$ относительно расстояния Кемени f в том или ином пространстве бинарных отношений X. Обратим внимание на роль пространства X. В зависимости от того, каково X, вычисление медианы может быть как весьма сложной задачей, так и элементарной.

Если X – пространство упорядочений (ранжировок), как в книге Кемени и Снелла [88], то имеет место первый из этих случаев. Для нахождения медианы Кемени по выборке, состоящей из ранжировок, понадобилось разработать специальные алгоритмы [117].

Если же X – пространство всех бинарных отношений, то медиана Кемени элементарно находится по правилу большинства [170]. А именно, если у более чем половины матриц, описывающих входящие в выборку бинарные отношения, на определенном месте стоит 1, то и у медианы Кемени на этом месте стоит 1. Если для более чем половины матриц определенный элемент равен 0, то и у эмпирического среднего этот элемент равен 0. Если же число единиц и нулей совпадает (это возможно лишь при четном объеме выборки), то медиана Кемени определяется неоднозначно. Соответствующий элемент итоговой матрицы может равняться как 0, так и 1 – сумма расстояний от неё до элементов выборки одна и та же – минимальная из возможных. Это утверждение вытекает из аналогичного результата для подмножеств конечного множества, поскольку бинарные отношения – это подмножества декартова квадрата того множества, между элементами которого рассматриваются отношения. Поясним сказанное.

Если A и B – подмножества конечного множества $X = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, то, расстояние, обобщающее расстояние Кемени, имеет вид

$$d(A,B) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \,|\, \chi_A(y_j) - \chi_B(y_j) \,|,$$

где χ_C – индикатор (индикаторная функция) множества C, т.е. $\chi_C(x) = 1$, если $x \in C$, и $\chi_C(x) = 0$ в противном случае. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ – та совокупность подмножеств X, для которой ищем эмпирическое среднее. Необходимо решить оптимизационную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i, z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \mu_j \left| \chi_{x_i}(y_j) - \chi_z(y_j) \right| \to \min, \quad z \subseteq X.$$

Ясно, что можно поменять местами суммы и решать задачу

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i, z) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_j \left| \chi_{x_i}(y_j) - \chi_z(y_j) \right| \right) \to \min, \quad z \subseteq X.$$

Эта задача допускает декомпозицию на k задач:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_j \left| \chi_{x_i}(y_j) - \chi_z(y_j) \right| \to \min, \quad j = 1,2,\ldots,k, \quad z \subseteq X.$$

Другими словами, для каждого элемента X по отдельности надо решить, включать его в эмпирическое среднее или нет. При конкретном j обозначим $\chi_{x_i}(y_j) = a_i,\ \chi_z(y_j) = b$. Тогда каждая из поэлементных задач имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b| \to \min, \ b \in \{0,1\},$$

причем каждое из a_i – либо 0, либо 1. Таким образом, надо найти минимум из двух величин:

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i, n - \sum_{i=1}^{n} a_i \right\}.$$

Первая из этих сумм соответствует $b = 0$, вторая – $b = 1$. Если первая сумма меньше, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < n - \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i < \frac{n}{2},$$

то следует положить $b = 0$, т.е. не включать элемент y_j в эмпирическое среднее. Если

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > n - \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i > \frac{n}{2},$$

то, наоборот, включать. Если же имеет место равенство,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n - \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2},$$

то оба варианта $b = 0$ и $b = 1$ дают одно и то же значение минимизируемой функции, и решение задачи оптимизации неоднозначно, эмпирическое среднее состоит из 2^t подмножеств, где t – число элементов X, для которых имеет место рассматриваемые равенства. Таким образом, решение принимается по правилу большинства.

Вернемся к медиане Кемени. В ее определении, строго говоря, участвуют не одно пространство бинарных отношений, а два. Первое – это пространство X_1, в котором лежат усредняемые бинарные отношения (мнения экспертов) $x_1, x_2, x_3,...,x_n$. Второе – это пространство X_2, по элементам которого проводится минимизация (в котором ищется эмпирическое среднее как решение задачи оптимизации). Эти пространства могут различаться. Например, пусть X_1 - пространство всех бинарных отношений, а X_2 – пространство ранжировок без связей. Это значит, что итоговое мнение комиссии экспертов – строгое упорядочение, в то время как ответы экспертов могут включать в себя противоречия (не быть транзитивными). Есть и иная постановка – пусть ответы экспертов – строгие упорядочения (ранжировки без связей), а итоговое мнение ищется среди кластеризованных ранжировок.

Выделение двух пространств бинарных отношений позволяет более адекватно обрабатывать ответы экспертов. Например, мнение эксперта, особенно если оно получено с применением процедуры парных сравнений, отнюдь не всегда свободно от противоречий (не всегда выполнена транзитивность). Чтобы применять классическую процедуру получения итогового мнения комиссии экспертов в виде медианы Кемени - Снелла, иногда рекомендуют предварительно корректировать мнения экспертов, избавляясь от противоречий. Естественно, при этом искажаются исходные мнения экспертов. Использование концепции «двух пространств бинарных отношений» позволяет избежать этого искажения и получить итоговое мнение комиссии экспертов, более адекватное исходным мнениям экспертов. Приведенные соображения важны, в частности, при использовании люсианов как моделей ответов экспертов.

Вычисление медианы Кемени в общем случае - задача целочисленного программирования. Для ее нахождения используются различные алгоритмы дискретной математики, в частности, основанные на методе ветвей и границ. Применяют и алгоритмы, основанные на идее случайного поиска, поскольку для каждого бинарного отношения нетрудно найти множество его соседей.

В общем случае медиана Кемени может не совпадать ни с одним из мнений экспертов. Последнее обстоятельство является поводом для критики рассматриваемого способа усреднения. Действительно, если представить себе, что ответы экспертов равномерно распределены по поверхности тора, то может случиться так, что медиана Кемени – центр тора, далека от мнений кого-либо из экспертов.

Выход из этого парадокса может быть найден путем изменения области минимизации $\{A\}$ в определении медианы Кемени. Действительно, если принять, что пространство X_2, по элементам которого проводится минимизация, совпадает с множеством ответов экспертов, то, очевидно, решением задачи минимизации будет одно из экспертных мнений. Такое эмпирическое среднее назовем «модифицированной медианой Кемени». Здесь наглядно видна польза концепции «двух пространств бинарных отношений».

Преимуществом модифицированной медианы Кемени является значительно меньшая вычислительная трудоемкость. Если для расчета медианы Кемени необходимо применять специальные алгоритмы дискретной оптимизации (см., например, [117]), то модифицированную медиану Кемени можно найти без привлечения компьютера.

Проблема выявления итогового мнения комиссии экспертов заслуживает дальнейшего изучения. Есть ряд методов его нахождения – по средним арифметическим рангов (баллов), по медианам рангов (баллов), на основе согласования результатов, полученных двумя указанными методами, методы медианы Кемени, среднего по Кемени, модифицированной медианы и др. Сопоставление результатов применения разных методов нахождения итогового мнения к одним и тем же исходным данным - интнресная научная задача. Отметим, что при анализе реальных данных достаточно часто *все* используемые методы дают одно и то же итоговое мнение. С точки зрения теории устойчивости [170] это свидетельствует об абсолютной устойчивости относительно выбора метода расчета, о том, что итоговое мнение комиссии экспертов действительно существует и соответствует результатам расчетов.

5.2. Устойчивое экономико-математическое моделирование с целью оценки, анализа и управления рисками

Как показано в главе 1, методология системной оценки, анализа и управления рисков разрабатывается с помощью вероятностно-статистических методов и моделей, статистики нечисловых данных, в том числе интервальной статистики и интервальной математики, моделей и методов теории нечеткости и теории игр, имитационного моделирования. Необходимо принимать во внимание многообразие характеристик рисков, многообразие критериев принятия управленческих решений [2, 8, 9, 71, 154, 219, 243, 246, 295, 321, 333]. Обсудим разработанный нами подход к моделированию риска.

Построение аддитивно-мультипликативной модели оценки рисков. Разработаны непараметрические методы доверительного оценивания характеристик риска по эмпирическим данным (см. [200, 210] и главу 3), а также ряд соответствующих ЭММиМ, в том числе модель выбора технологий на основе экспертных оценок и аддитивно-мультипликативная модель расчета рисков. Последняя основана на декомпозиции задачи оценки и анализа риска, выделении основных групп факторов риска, независимых между собой, так что вероятность успешного выполнения проекта есть

$$P = P_1 P_2 \ldots P_k ,$$

где (1- P_i) – риск, порождаемый i-ой группой факторов. Групповые риски оцениваем аддитивно:

$$P_n = 1 - A_{1n}X_{1n} - A_{2n}X_{2n} - \ldots - A_{Kn}X_{Kn},\ n = 1, 2, \ldots, k,$$

где X_{1n}, X_{2n},..., X_{Kn} - факторы (переменные), используемые при вычислении оценки риска типа n, A_{1n}, A_{2n},..., A_{Kn} - коэффициенты весомости (важности) этих факторов. Значения факторов X_{1n}, X_{2n},..., X_{Kn} оценивают эксперты для каждого конкретного проекта, в то время как значения коэффициентов весомости A_{1n}, A_{2n},..., A_{Kn} задаются одними и теми же для всех проектов - по результатам специально организованного экспертного опроса.

В качестве примера разработки и применения вероятностно-статистического (с использованием экспертов) моделирования оценки риска в конкретной прикладной задаче рассмотрим аддитивно-мультипликативную модель расчета рисков выполнения инновационных проектов. Опишем его на примере выполнения инновационных проектов в научно-образовательных комплексах (исследование проведено по заказу Республиканского исследовательского научно-консультационного центра экспертизы).

Научно-исследовательский коллектив, выполняющий инновационный проект – это по сути своей самостоятельное предприятие (это утверждение соответствует концепции фрактальности, другими словами, самоподобия [75, 249]). Однако такому предприятию целесообразно передать часть своих вспомогательных функций, включая оформление финансовых взаимоотношений, предприятию-носителю, в рассматриваемой схеме – научно-образовательному комплексу.

Основные понятия инновационного менеджмента с точки зрения принятия управленческих решений на промышленных предприятиях рассмотрены в [207, гл.1.4]. Разработке и освоению нововведений препятствует множество факторов: отсутствие необходимых навыков и знаний, недостаток кадровых, финансовых и материально-технических ресурсов и т.д. Учитывая слабую роль государства (в настоящее время) в развитии и стимулировании инноваций, предприниматели должны изыскивать возможности развития инноваций в малом бизнесе.

Одной из таких возможностей является сотрудничество с научно-образовательными комплексами на предмет разработки и реализации инновационных проектов. Оно может способствовать решению такой проблемы, как нехватка квалифицированных кадров или отсутствие у персонала предприятия специализированных знаний и навыков, требующихся для разработки (внедрения) инновационного проекта. Такое сотрудничество может осуществляться путем финансирования научно-технической разработки инновационного проекта в научно-образовательном комплексе. При этом партнером со стороны научно-образовательного комплекса выступает творческий коллектив.

Осуществляя подобное сотрудничество, надо учитывать, что инновации часто связаны с большим риском. Чем больше оригинального содержится в результатах инновационного процесса, тем значительнее ожидаемая прибыль и тем выше степень риска при внедрении нового товара или процесса. Главными факторами, на которых сосредотачиваются мероприятия по снижению уровня инновационных рисков, выступают объем и надежность информации об источниках риска, а также степень контроля над ними. Одним из инструментов подобного контроля является создание и использование ЭММиМ расчета вероятностей успешной реализации инновационных проектов в научно-образовательных комплексах и соответствующих рисков [34].

Инновационные проекты в научно-образовательных комплексах. Под инновационным проектом в научно-образовательных комплексах понимают проект, который опирается на ранее проведенные научно-технические разработки, приведшие к перспективным для коммерческого использования результатам. Предполагается, что коммерческая реализация осуществляется внешним партнером (или партнерами). При этом научно-образовательный комплекс получает доход от реализации инновационного проекта - в виде процента от прибыли партнера, либо в виде единовременной выплаты (например, при покупке лицензии партнером) [16].

Таким образом, в инновационном проекте участвуют как минимум две организации - научно-образовательный комплекс (в лице его представителя – малого предприятия) и внешний партнер. Работа внутри научно-образовательного комплекса часто разбивается на два этапа - 1) собственно научно-исследовательскую работу прикладного характера и 2) разработку технологии выпуска продукции. В деятельности внешнего партнера также можно выделить этапы, например, такие:

1) освоение выпуска продукции,

2) переход к массовому выпуску (что предполагает предварительную рекламную кампанию и иную маркетинговую деятельность),

3) продажу первых партий продукции,

4) первое получение оплаты от покупателей,

5) первое поступление средств на расчетный счет вуза (субсчет малого предприятия), и т.д.

Таким образом, для успешного завершения инновационного проекта, как правило, необходим внешний партнер, с деятельностью которого связана своя группа рисков. Возможны исключения. Если инновационный проект связан с доведением до коммерческого распространения программного продукта, то научно-образовательный комплекс (в лице своего дочернего малого предприятия) может взять на себя маркетинг и рекламную кампанию, а также и продажу (поскольку правовые возможности достаточно быстро меняются, то их не рассматриваем в данной работе). Если инновационный проект посвящен развитию внутривузовской сети ЭВМ, то может быть запланировано покрытие расходов за счет источников финансирования тех структур научно-образовательного комплекса, которые будут пользоваться этой сетью.

Структура и выраженность рисков реализации инновационных проектов в научно-образовательных комплексах несколько отличаются от таковых для инновационных проектов вообще и тем более от рисков разнообразных инвестиционных проектов. На первое место выходят риски невыполнения работы в соответствии с техническим заданием и невозврата (полного или частичного) средств.

Возможные итоги выполнения инновационной работы можно описать следующим образом:

а) работа и финансовые обязательства всех партнеров выполнены в полном объеме;

б) научно-исследовательская часть работы выполнена полностью, но по каким-либо причинам внешний партнер свои обязательства, в том числе финансовые, выполнил не в полном объеме;

в) научно-исследовательская часть работы выполнена полностью, но коммерческая часть проекта сорвана (внешним партнером), финансовые обязательства не выполнены;

г) научно-исследовательская часть работы не выполнена полностью, но получены существенные научные результаты; для окончания работы требуется некоторое время;

д) научно-исследовательская часть работы не выполнена, но получены некоторые интересные научные результаты; однако планируемый вначале научный результат не будет достигнут в обозримое время;

е) выполнение в вузе инновационной работы сорвано полностью.

Есть вероятность осуществления макроэкономического риска, которое может еще более ухудшить результат выполнения инновационного процесса.

Таким образом, только в двух случаях из шести оценка однозначна: итог а) - это полный успех, а итог е) - это полный провал. В остальных случаях - итоги б), в), г), д) - получены некоторые научные результаты, а в случае итога б) - также и некоторые коммерческие результаты. При этом в случае итогов а), б), в) научно-исследовательский коллектив выполнил всё, что от него требовалось, хотя «полный успех» имеет место только в одном из этих трех случаев - в зависимости от результатов работы внешнего партнера.

Модель инновационного проекта. Начнем с выделения основных факторов, определяющих риски реализации инновационных проектов в научно-образовательных комплексах. Исходить из двухступенчатой схемы: сначала работает научно-исследовательский коллектив, затем он передает свои разработки внешнему партнеру, и тот начинает коммерческий этап.

Вероятность того, что научно-исследовательский коллектив полностью выполнит свою работу, зависит от двух групп факторов, определяемых ситуациями соответственно внутри коллектива исполнителей и внутри научно-образовательного комплекса в целом. Четвертый фактор риска - макроэкономический, ситуация в народном хозяйстве (степень выраженности неплатежей, инфляции, налогового бремени и т.д.).

Выделены четыре основные группы факторов риска. Они связаны:

- с коллективом исполнителей,

- с научно-образовательным комплексом,

- с внешним партнером,

- с общей экономической обстановкой.

Принимаем, что в ЭММиМ все четыре фактора независимы между собой (в теоретико-вероятностном смысле). Следовательно, основная формула организационно-экономической модели расчета рисков реализации инновационных моделей в научно-образовательных комплексах имеет вид

$P = P_1 P_2 P_3 P_4$,

где P - вероятность «полного успеха», т.е. итога а) согласно приведенной выше классификации, при этом риск того, что инновационный проект не будет осуществлен полностью, оценивается вероятностью «отсутствия полного успеха», т.е. величиной (1 - P),

P_1 - вероятность того, что ситуация внутри коллектива исполнителей не помешает выполнению инновационного проекта (следовательно, риск коллектива оценивается величиной $1-P_1$),

P_2 - вероятность того, что ситуация внутри научно-образовательного комплекса не помешает выполнению инновационного проекта ($1 - P_2$ - риск вуза),

P_3 - вероятность того, что внешний партнер полностью выполнит свою работу, после того, как научно-исследовательский коллектив полностью выполнит свою часть работы ($1-P_3$ - риск партнера),

P_4 - вероятность того, что ситуация в народном хозяйстве не помешает выполнению инновационного проекта ($1-P_4$ – макроэкономический риск).

Следующий шаг - оценивание четырех перечисленных вероятностей. Будем их приближать с помощью линейных функций, т.е. представлять в виде:

$P_n = 1 - A_{1n}X_{1n} - A_{2n}X_{2n} - ... - A_{Kn}X_{Kn}$, $n = 1, 2, 3, 4$,

где $X_{1n}, X_{2n}, ..., X_{Kn}$ - факторы (переменные), используемые при вычислении оценки риска типа n,

$A_{1n}, A_{2n}, ..., A_{Kn}$ - коэффициенты весомости (важности) этих факторов.

Значения факторов X_{1n}, X_{2n},..., X_{Kn} оценивают эксперты для каждого конкретного инновационного проекта, в то время как значения коэффициентов весомости A_{1n}, A_{2n},..., A_{Kn} задаются одними и теми же для всех проектов - по результатам специально организованного экспертного опроса.

Члены экспертной комиссии оценивают факторы X_{mn} по качественной шкале:

0 - практически невозможное событие (с вероятностью не более 0,01),

1 - крайне маловероятное событие (с вероятностью от 0,02 до 0,05),

2 - маловероятное событие (вероятность от 0,06 до 0,10),

3 - событие с вероятностью, которой нельзя пренебречь (от 0,11 до 0,20),

4 - достаточно вероятное событие (вероятность от 0,21 до 0,30),

5 - событие с заметной вероятностью (более 0,30).

Согласно теории измерений итоговая оценка дается как медиана индивидуальных оценок (при четном числе членов экспертной комиссии - как правая медиана).

Поскольку максимально возможный балл - это 5, то сумма всех весовых коэффициентов выбиралась равной 1/5 = 0,2. Таким образом, если по всем факторам (переменным) экспертами выставлены максимальные баллы, то соответствующая вероятность оценивается как 0, т.е. выполнение инновационного проекта признается невозможным.

Для упрощения описания переменные X_{m1} будем ниже обозначать X_m, переменные X_{m2} - как Y_m, вместо X_{m3} будем писать Z_m, а вместо X_{m4} - W_m. При описании числовых значений коэффициентов A_{mn} будем опускать индекс n.

Обсудим структуризацию вероятностей P_1, P_2, P_3, P_4, а затем получим итоговую формулу для оценивания вероятности P (и тем самым риска

(1-P) реализации инновационного проекта в научно-образовательном комплексе).

Риск коллектива. Начнем с оценивания P_1 - вероятности того, что ситуация внутри коллектива исполнителей не помешает выполнению инновационного проекта. Введем следующие переменные:

X_1 - недооценка сложности научно-технической задачи (включая возможный выбор принципиально неверного направления работ),

X_2 - нехватка времени (из-за неправильного планирования процесса выполнения инновационного проекта, в то время как основное направление работ выбрано правильно),

X_3 - возникшие в ходе выполнения работы проблемы, связанные с научным руководителем темы, в частности, с его длительным отсутствием или сменой (из-за длительной командировки, болезни, смерти, ухода на пенсию, перехода на другую работу и т.д.),

X_4 - возникшие в ходе выполнения работы проблемы, связанные с иными непосредственными участниками работы (кроме руководителя).

В двух последних позициях (факторы X_3 и X_4) причинами невыполнения работы могут быть и недостаточная квалификация руководителя работы либо иных членов научно-исследовательского коллектива.

Экспертный опрос дал значения: A_1 = 0,02, A_2 = 0,08, A_3 = 0,07, A_4 = 0,03.

*Пример 1***.** Если итоговая оценка экспертов такова: X_1=3; X_2=2; X_3=4; X_4=1, то $P_1 = 1 - A_1X_1 - A_2X_2 - A_3X_3 - A_4X_4 = 1 - 0{,}06 - 0{,}16 - 0{,}28 - 0{,}03 = 0{,}47$.

В данном случае эксперты достаточно скептически относятся к возможности выполнения работы в срок, причем основная причина скепсиса - в возможном отъезде научного руководителя (риск оценивается как 0,28), вторая заметная причина - возможный недостаток времени (риск 0,16).

Риск научно-образовательного комплекса. Для оценивания P_2 введем переменные:

Y_1 - организационные изменения в научно-образовательном комплексе, предпринятые его руководством,

Y_2 – внутренние экономические проблемы (например, работы будут на какое-то время приостановлены из-за решения руководства научно-образовательного комплекса (несостоятельного с правовой точки зрения) о направлении средств проекта на оплату труда других сотрудников),

Y_3 - отсутствие в научно-образовательном комплексе соответствующей материальной базы (оборудования, материалов, вычислительной техники, площадей и т.д.).

Экспертный опрос дал: $A_1 = 0{,}10$; $A_2 = 0{,}08$; $A_3 = 0{,}02$.

Пример 2. Если итоговые (групповые) оценки экспертов таковы: $Y_1 = 1$; $Y_2 = 4$; $Y_3 = 0$, то $P_2 = 1 - \mathrm{A}_1 Y_1 - A_2 Y_2 - A_3 Y_3 = 1 - 0{,}01 - 0{,}32 - 0 = 0{,}67$.

По мнению экспертов, для данного проекта и научно-образовательного комплекса наибольшее отрицательное влияние могут оказать внутреннние экономические проблемы (риск 0,32).

Риск партнера. Для оценивания P_3, введем переменные:

Z_1 - финансовые проблемы внешнего партнера, связанные с недостатками в работе его сотрудников,

Z_2 - финансовые проблемы внешнего партнера, связанные с деятельностью конкретных государственных органов и частных фирм (например, неплатежи, административные решения),

Z_3 - работу над проектом сорвет изменение поведения возможных потребителей, например, из-за изменения моды или из-за решений соответствующих вышестоящих органов (министерств (ведомств) или регионального руководства), связанных, в частности, с выдачей лицензий, закрытием информации или выбором технической политики,

Z_4 - на возможности выполнения инновационного проекта отрицательно скажутся организационные преобразования у внешнего партнера, в частности, смена руководства.

Экспертный опрос дал: $A_1 = 0{,}03$, $A_2 = 0{,}06$, $A_3 = 0{,}06$, $A_4 = 0{,}05$.

Пример 3. Если итоговые (групповые) оценки экспертов таковы: $Z_1 = 3$; $Z_2 = 5$; $Z_3 = 1$; $Z_4 = 4$, то $P_3 = 1 - A_1Z_1 - A_2Z_2 - A_3Z_3 - A_4Z_4 = 1 - 0{,}09 - 0{,}30 - 0{,}06 - 0{,}20 = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.

Эксперты достаточно скептически относятся к возможности успешного выполнения внешним партнером своих обязательств по договору, связанному с коммерческой реализацией разработок, выполненных по инновационному проекту. Основные «подводные камни», по их мнению, это действия конкретных государственных органов (риск 0,30), и нежелательные организационные преобразования (кадровые изменения) у внешнего партнера (риск 0,20).

Макроэкономический риск. Под макроэкономическим риском понимаем риск, определяемый внешними по отношению к системе «научно-образовательный комплекс - внешний партнер» факторами, прежде всего теми, которые являются общими для всего народного хозяйства. Для оценивания P_4 введем переменные:

W_1 - отсутствие или сокращение номинального финансирования (неплатежи со стороны бюджета),

W_2 - резкое сокращение реального финансирования (в сопоставимых ценах) из-за инфляции,

W_3 - изменение статуса и/или задач научно-образовательного комплекса или его внешнего партнера (в частности, из-за ликвидации или реорганизации научно-образовательного комплекса) по решению вышестоящих органов (министерства (ведомства) или регионального руководства),

W_4 - относящиеся к инновационному проекту решения соответствующих вышестоящих органов (министерств (ведомств) или регионального руководства), связанные, например, с глобальным закрытием информации или с таким выбором технической политики, который делает ненужным или нецелесообразным выполнение инновационного проекта.

Экспертный опрос дал: $A_1 = 0{,}10$, $A_2 = 0{,}05$, $A_3 = 0{,}03$, $A_4 = 0{,}02$.

Пример 4. Если итоговые (групповые) оценки экспертов таковы: $W_1=3$; $W_2=4$; $W_3= 1$; $W_4 = 2$, то $P_4 = 1 - A_1W_1 - A_2W_2 - A_3W_3 - A_4W_4 = 1 - 0{,}30 - 0{,}20 - 0{,}03 - 0{,}04 = 1 - 0{,}57 = 0{,}43$.

Эксперты считают, что общая экономическая ситуация в стране может негативно сказаться на возможности выполнения рассмотренного ими инновационного проекта. Причем наиболее опасаются неплатежей со стороны государства (отсутствия или сокращения перечисления средств для выполнения проекта) и в несколько меньшей мере - уменьшения реального финансирования из-за инфляции (что, возможно, отвлечет членов научно-исследовательского коллектива на побочные заработки).

Итоговые оценки. Сведем вместе полученные результаты. Вероятность успешного выполнения инновационного проекта оценивается по формуле:

$$P = P_1P_2P_3P_4,$$

где

$$P_1 = 1 - 0{,}02X_1 - 0{,}08X_2 - 0{,}07X_3 - 0{,}03X_4,$$

$$P_2 = 1 - 0{,}10Y_1 - 0{,}08Y_2 - 0{,}02Y_3,$$

$$P_3 = 1 - 0{,}03Z_1 - 0{,}06Z_2 - 0{,}06Z_3 - 0{,}05Z_4,$$

$$P_4 = 1 - 0{,}10W_1 - 0{,}05W_2 - 0{,}03W_3 - 0{,}02W_4.$$

Для данных, приведенных в примерах 1 - 4, вероятность того, что научно-исследовательский коллектив в научно-образовательном комплексе полностью выполнит свою работу, равна: $P_1P_2 = 0{,}47\times0{,}67 = 0{,}3149$, а вероятность успешного осуществления проекта $P = P_1P_2P_3P_4 = 0{,}47\times0{,}67\times0{,}35\times0{,}43 = 0{,}0473924$. Таким образом, имеется примерно 1 шанс из 20, что рассматриваемый инновационный проект будет успешно завершен (в намеченные сроки и с запланированным экономическим эффектом).

В табл. 5.2 приведены результаты расчета вероятностей, связанных с реализацией четырех типовых инновационных проектов. Видно, какое влияние оказывает изменение того или иного фактора на общую величину вероятности выполнения проекта. Выполнение первого проекта практически в одинаковой степени зависит от всех четырех факторов. Низкая вероятность выполнения второго проекта связана с относительно высокими показателями всех четырех видов риска. Вероятность выполнения третьего проекта – наименьшая, что связано с высоким риском внутри коллектива исполнителей и внутри научно-образовательного комплекса. У четвертого проекта наибольший риск связан с политической и экономической обстановкой в стране. Вероятность выполнения пятого проекта относительно невысокая, но она выше, чем у второго, третьего и четвертого проектов.

Выбор инновационных проектов для финансирования целесообразно проводить с учетом процедуры вероятностно-статистической (с учетом мнений экспертов) оценки их рисков реализации [56, 207].

Основная проблема при управлении рисками – корректная формулировка цели такого управления. Поскольку существует целый спектр различных характеристик риска (например, если потери от риска моделируются случайной величиной), то оптимизация управления риском сводится к решению задачи многокритериальной оптимизации.

Например, естественной является задача одновременной минимизации среднего ущерба (математического ожидания ущерба) и разброса ущерба (дисперсии ущерба). Один из подходов – выбрать «главный критерий», по которому проводить оптимизацию, превратив остальные критерии в ограничения. Например, минимизировать средний ущерб, потребовав, чтобы дисперсия ущерба не превосходила заданной величины.

Страхование и диверсификация – распространенные методы уменьшения неопределенности, присущей рискам, за счет повышения среднего уровня затрат.

Таблица 5.2.

Вероятности реализации инновационного проекта в вузе

Коэффициенты весомости и вероятности	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4	Проект 5
1. Риск для коллектива исполнителей					
An	*Xn*(1)	*Xn*(2)	*Xn*(3)	*Xn*(4)	*Xn*(5)
0,02	0	2	4	2	1
0,08	0	3	5	2	2
0,07	1	2	4	2	2
0,03	1	2	2	3	0
P_1 =	0,9	0,52	0,18	0,57	0,68
2. Риск внутри вуза					
An	*Yn*(1)	*Yn*(2)	*Yn*(3)	*Yn*(4)	*Yn*(5)
0,1	0	3	4	1	1
0,08	1	2	5	1	2
0,02	1	3	4	0	2
P_2=	0,92	0,48	0,12	0,82	0,70
3. Риск партнера					
An	*Zn*(1)	*Zn*(2)	*Zn*(3)	*Zn*(4)	*Zn*(5)
0,03	0	2	3	1	2
0,06	1	2	2	1	0
0,06	1	3	2	1	1
0,05	0	1	1	1	1
P_3=	0,880	0,590	0,620	0,800	0,830
4. Макроэкономический риск					
An	*Wn*(1)	*Wn*(2)	*Wn*(3)	*Wn*(4)	*Wn*(5)
0,1	0	3	2	5	2
0,05	1	2	2	4	2
0,03	1	1	1	5	1
0,02	0	2	0	5	1
P_4=	0,92	0,53	0,67	0,05	0,65
Вероятность выполнения данного проекта					
P=	0,670	0,078	0,009	0,019	0,26
Вероятность выполнения работ без учета риска партнера					
$P_1P_2P_4$	0.76	0,13	0,01	0,02	0.3
Вероятность выполнения работ без учета риска страны					
$P_1P_2P_3$	0,73	0,15	0,01	0,37	0,4
Вероятность выполнения работ без учета риска вуза					
$P_1P_3P_4$	0,73	0,16	0,07	0,02	0,37
Вероятность выполнения работ в вузе					
P_1P_2	0,83	0,16	0,07	0,02	0,37

Второй основной подход – это свертка многих критериев в один интегральный и переход к оптимизации по одному критерию. Используют также методы, основанные на общей схеме устойчивости [170].

В мире растет интерес к развитию организационного обеспечения управления рисками. Разработаны национальные стандарты [353]. Вслед за развитием служб обеспечения качества и систем экологического менеджмента прогнозируем широкое создание служб риск-менеджмента во главе с топ-менеджерами предприятий и организаций, их объединений, интегрированных производственно-корпоративных структур.

5.3. Экономическо-математическое моделирование при разработке и принятии инновационных и инвестиционных решений

Раздел 5.3 посвящен применению устойчивых ЭММиМ в инновационном и инвестиционном менеджменте. В [238, 243] выявлена роль социальных, технологических, экологических, экономических, социальных факторов в рассматриваемых функциональных областях деятельности промышленных предприятий. Как углубление этих идей разработаны [217, 220] основы неформальной информационной экономики будущего на базе прогнозирования развития информационных технологий и теории принятия решений, в том числе методология и теоретические положения организационно-экономической и сетевой поддержки инновационных проектов в области высоких технологий, в частности, вопросы организационно-экономическое обеспечения, проведения Интернет-аукционов и экспертиз на различных этапах жизненного цикла инноваций. Рассмотрим подробнее этот сюжет [208, 212, 241, 257].

Инновационная деятельность: организационно-экономическое обеспечение и Интернет-аукционы [222]. Проанализировав путь от возникновения научно-технической идеи до массового выпуска продукции, приходим к выводу, что для успешного осуществления инновационной деятельности, кроме научно-технических коллективов, предлагающих заявки к рассмотрению, заказчиков, реализующих проекты, и инвесторов, обеспечивающих финансирование, необходима структура, занимающаяся организационно-экономическим обеспечением - маркетинговыми исследованиями, подготовкой бизнес-планов, проведением экспертиз, использованием информационных технологий. Очевидна необходимость создания Инновационного центра (ИЦ) - аналитического консультационного центра, предназначенного для организационно-экономической поддержки конкретных инновационных исследований в области наукоемких технологий при подготовке и проведении Интернет-аукциона высоких технологий. Это – основной вывод работы, выполненной по заданию Московского комитета по науке и технике в 2005-2006 гг.

Процедуры экспертного оценивания (см. раздел 5.1) нужно применять не только на заключительном этапе, но и на всех остальных этапах анализа инвестиционного проекта.

Не менее важна разработка компонента маркетинговой поддержки. Изучение рынка проводится путем непосредственного наблюдения, с помощью анализа данных о продажах и опроса потребителей (в том числе проведения сегментации и прогнозирования рынка), экспериментальными методами - выпуском пилотных (пробных) партий товара, и т.п. (см. главу 3).

Перейдем к другим сюжетам, посвященным вопросам организационно-экономического моделирования при разработке и принятии промышленными предприятиями инновационных решений [318]. В разделе 5.2 развита методология оценки рисков реализации инновационных проектов и на ее основе построена аддитивно-мультипликативная модель оценки риска реализации инновационных проектов в вузах. Ниже предложены методы нечеткого выбора в рамках эконометрической поддержки контроллинга инноваций.

Эконометрическая поддержка контроллинга инноваций [73]. В настоящее время активно разрабатывается подход к управлению инновационными проектами, основанный на методологии контроллинга.

Одной из главных причин возникновения и внедрения концепции контроллинга для разработки инноваций на промышленных предприятиях стала необходимость в системной интеграции различных аспектов управления инновационными проектами. Контроллинг обеспечивает методическую и инструментальную базу для поддержки основных функций менеджмента: планирования, учета, контроля и анализа, а также оценки ситуаций для принятия управленческих решений [100].

По нашему мнению, контроллинг инноваций включает в себя четыре этапа:

- оценки реализуемости проекта;
- информационной поддержки планирования разработки инновационного проекта;
- информационной поддержки контроля над осуществлением инновационного проекта;
- информационной поддержки функции анализа.

На первом этапе контроллеру проекта необходимо ответить на вопрос: достигнет ли предприятие поставленных перед ним целей, если приступит к реализации проекта. Цели проекта - как и цели самого предприятия, должны иметь ясный смысл, результаты, полученные при достижении цели, должны быть измеримы, а заданные ограничения (по времени, рамкам бюджета, выделенным ресурсам и качеству получаемых результатов) выполнимы. Если при реализации проекта общефирменные цели не достигаются, то подразделение контроллинга вырабатывает предложения об альтернативных вариантах реализации проекта, способных удовлетворить поставленные цели. На этом этапе возникает задача выбора варианта реализации проекта, позволяющего достичь общефирменные цели. Для решения этой задачи можно воспользоваться эконометрическими методами [200].

Каждый предложенный вариант реализации проекта имеет свои преимущества и недостатки. Он может характеризоваться как количественными экономическими показателями, такими как затраты, поступления и др., техническими показателями, описывающими характеристики качества разрабатываемого продукта, так и качественными показателями, выраженными в виде терминов, например, крошечный, маленький, средний.

Целесообразно выделить эталонный вариант реализации проекта и его характеристики. Характеристики подбираются таким образом, чтобы проект был оптимальным с точки зрения предъявляемых к нему требований. Чтобы сравнить варианты реализации проекта с эталонным вариантом и выбрать из них лучший, можно применить эконометрические методы, основанные на алгоритмах анализа качественных и количественных данных. Такие методы подробнее рассматриваются ниже.

На втором этапе осуществляется разработка планово-организационных мероприятий. Подразделение контроллинга разрабатывает методики и инструменты планирования, наилучшим образом подходящие в данных условиях и обеспечивающие наиболее точные результаты. Подготовленный план проверяется на реализуемость, затем решаются вопросы, связанные с координацией участников проекта, с организацией информационного потока, с организацией работ и назначением ответственных.

На третьем этапе устанавливается время проведения контрольных мероприятий, связанное с выполнением определенных блоков работ. Выбираются подконтрольные показатели, характеризующие финансовое и организационное состояние проекта. Устанавливаются допустимые отклонения выбранных показателей, превышение которых может привести к негативным последствиям. Проводится учет показателей, фиксация отклонений. Выявляются причины и виновники отклонений.

На заключительном четвертом этапе подразделение контроллинга оценивает влияние выявленных отклонений на дальнейшие шаги реализации проекта. Выясняет, как выявленные отклонения повлияли на основные управляемые параметры проекта.

По окончанию цикла, контроллер проекта подготавливает отчет с предложением вариантов решения возникших проблем и изменением плановых величин на следующий период.

Применение ЭММиМ сравнения и выбора в контроллинге инноваций. На первом этапе контроллинга инноваций необходимо решить задачу выбора варианта реализации проекта. Выбор между вариантами очевиден, если один из вариантов лучше другого по всем рассматриваемым показателям. В реальных ситуациях выбора варианты обычно несравнимы - первый лучше по одним показателям, второй - по другим. Для сравнения вариантов приходится прибегать к экспертным технологиям [200, 243]. Используем подход, основанный на описании качественных характеристик нечеткими множествами.

Пусть $S = \{S_i \mid i = \overline{1, n}\}$ - множество, состоящее из n вариантов реализации инновационного проекта. Для каждого варианта S_i определено m характеристик Q_{ij}, $j = \overline{1, m}$. В зависимости от конкретных условий набор характеристик может меняться. Необходимо выделить эталонный вариант реализации проекта S_o и его характеристики Q_{oj}. Характеристики подбираются таким образом, чтобы проект был оптимальным с точки зрения предъявляемых к нему требований.

Требуется проранжировать имеющиеся варианты S реализации инновационного проекта по заданным m характеристикам на соответствие эталону. Для каждой характеристики Q_{ij}, строим нечеткое множество $Q_{ij}, i = \overline{0,1} \quad j = \overline{1, m}$. Для этого сначала определяем возможные значения переменной x_j, удовлетворяющие характеристике Q_{ij} Предполагается, что они составляют отрезок X_{ij}. Определяем середину q_{ij} и полуширину (радиус) $\delta_{ij} > 0$ отрезка X_{ij}: Таким образом,

$$X_{ij} = \left[q_{ij} - \delta_{ij}; q_{ij} + \delta_{ij}\right].$$

Для описания критерия Q_{ij} могут применяться различные функции принадлежности. В [44] используют функцию принадлежности:

$$\mu_{ij}\left(x_j\right) = e^{-\frac{\ln 2}{\delta_{ij}^2}\left(x_j - q_{ij}\right)^2}, i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Исходя из построения множества X_{ij}, в точке q_{ij} функция имеет максимум, в пределах множества X_{ij} функция принадлежности принимает значения больше 0,5, а вне X_{ij} – меньшее:

$$\mu_{ij} : G_j \to [0;1];$$
$$\mu_{ij}\left(q_{ij}\right) = 1;$$
$$\mu_{ij}\left(x_j\right) \geq 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad x_j \in X_{ij}$$

В результате получаем нечеткие множества

$$\hat{Q}_{ij} = \left\{x_j \mid \mu_{ij}\left(x_j\right)\right\}, \quad i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Чтобы определить, в какой мере характеристика варианта s_i близка характеристике эталонного варианта s_o, вычисляют степень равенства v_{ij} соответствующих нечетких множеств:

$$v_{ij} = \max_{G_j} \min\left(\mu_{ij}\left(x_j\right), \mu_{oj}\left(x_j\right)\right).$$

Значение максимина достигается в точке пересечения функций принадлежности:

$$v_{ij} = \mu_{oj}\left(x_{ij}^*\right),$$

где

$$x_{ij}^* = \frac{q_{ij}\delta_{oj} + q_{oj}\delta_{ij}}{\delta_{oj} + \delta_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Произведя взвешенное голосование, получают интегральную оценку v_i соответствия совокупности характеристик варианта реализации проекта s_i совокупности характеристик эталонного варианта s_o:

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_{ij}, \text{ где } \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1.$$

Здесь α_j является весом j-го критерия и показывает уровень его важности.

От инновационного менеджмента [342, 347] перейдем к проблемам управления инвестициями [32, 93, 115, 140, 207, 213, 311].

Оценки погрешностей характеристик финансовых потоков. Любое инженерное измерение проводится с некоторой погрешностью. Эту погрешность обычно приводят в документации (техническом паспорте средства измерения) и учитывают при принятии решений. Ясно, что и любое экономическое измерение проводится с погрешностью. Необходимо уметь ее оценивать.

Например, такие характеристики инвестиционных проектов как чистая текущая стоимость, срок окупаемости и сам вывод о прибыльности проекта зависят от неизвестного дисконт-фактора C или даже от неизвестной дисконт-функции. Очевидна зависимость от горизонта планирования (см. раздел 2.4). Количественная оценка финансовых потоков инвестиционных проектов, в частности, денежных поступлений и платежей, представляет собой сложную задачу, поскольку на каждый из них оказывает влияние множество разнообразных факторов, а сами оценки охватывают достаточно длительный промежуток времени. В частности, для рассматриваемого примера важно учитывать:

- возможные колебания рыночного спроса на продукцию;

- ожидаемые колебания цен на потребляемые ресурсы и производимую продукцию;

- возможное появление на рынке товаров-конкурентов;

- планируемое снижение производственно-сбытовых издержек по мере освоения новой продукции и наращивания объемов производства;

- влияние инфляции (см. [200, 219, 230, 237, 320]) на покупательную способность потребителей и, соответственно, на объемы продаж.

Поэтому такие оценки базируются на прогнозах внутренней и внешней среды предприятия. Использование прогнозных оценок всегда связано с риском, возрастающим при увеличении масштаба проекта и длительности инвестиционного периода.

Оценка финансовых потоков инвестиционных проектов связана также с анализом источников финансирования. Причем для целей проводимого анализа особое внимание уделяется внешним источникам, в частности, акционерному капиталу и планируемым затратам по обслуживанию привлеченного капитала: размерам дивидендов, периодичности их выплат и т.п. В работе [198] выдвинута концепция развития нечисловой экономики (на основе нечисловых экономических величин), эта концепция рассмотрена на примере управления инвестиционным процессом.

В качестве упрощенного примера рассмотрим исследование чистой текущей стоимости NPV на устойчивость (чувствительность) к малым отклонениям значений дисконт-функции. Для этого надо найти максимально возможное отклонение NPV при допустимых отклонениях значений дисконт-функции. В качестве примера рассмотрим инвестиционный проект, описываемый финансовым потоком из четырех элементов:

$$NPV = NPV(a(0), a(1), C(1), a(2), C(2), a(3), C(3)) =$$

$$= a(0) + a(1)C(1) + a(2)C(2) + a(3)C(3).$$

Здесь $a(0)$, $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$ – финансовый поток инвестиционного проекта, $C(1)$, $C(2)$, $C(3)$ – дисконт-факторы, соответствующие операции приведения элементов финансового потока (за первый, второй и третий периоды соответственно) к сопоставимым ценам на начало проекта.

Изучим устойчивость NPV для следующих значений:

$a(0)=-10$, $a(1)=3$, $a(2)=4$, $a(3)=5$, $C(1)=0{,}89$, $C(2)=0{,}80$, $C(3)=0{,}71$.

Пусть максимально возможные отклонения $C(1)$, $C(2)$, $C(3)$ равны $\pm 0{,}05$. Тогда максимум значений *NPV* равен

$NPVmax = -10+3\times0{,}94+4\times0.85+5\times0{,}76 = -10+2{,}82+3{,}40+3{,}80 = 0{,}02$,

в то время как минимум значений *NPV* есть

$NPVmin = -10+3\times0{,}84+4\times0.75+5\times0{,}66 = -10 +2{,}52 +3{,}00+3{,}30 = -1{,}18$.

Для *NPV* получаем интервал от (-1,18) до (+0,02). Его длина достаточно велика. В нем есть и положительные, и отрицательные значения. Так что не удается сделать однозначного заключения - будет проект убыточным или выгодным. Для принятия решения не обойтись без экспертов.

Вопросам нахождения максимально возможного отклонение чистой текущей стоимости с различными коэффициентами дисконтирования q_1, q_2, … , q_n от $NPV(q)$ с единым усредненным коэффициентом дисконтирования q посвящена выполненная под нашим руководством диссертация Д.Н. Алешина [1]. Работа выполнена в соответствии с общими подходами статистики интервальных данных [200, гл.9], поскольку ставится задача нахождения максимально возможного отклонения (нотны) $NPV(q_1, q_2, \dots , q_n)$ от $NPV(q)$ в результате малых отклонений приемлемой нормы прибыли по годам $q_1, q_2, \dots , q_n$ от q.

Что с точки зрения экономической теории означает приравнивание дисконт-функции константе? В разделе 2.3 показано, что необходимым и достаточным условием, выделяющим модели с постоянным дисконтированием среди всех моделей динамического программирования, является устойчивость результатов сравнения планов на 1 и 2 шага. Другими словами, модели с постоянным дисконтированием игнорируют изменение предпочтений людей, научно-технический прогресс, вообще любые изменения в экономике, вызванные СТЭЭП-факторами, а потому не могут быть полностью адекватны реальности.

Дополнительные проблемы вносит неопределенность горизонта планирования, а также неизвестность будущей инфляции. Если считать, что финансовый поток должен учитывать инфляцию, то это означает, что до принятия решений об инвестициях необходимо на годы вперед спрогнозировать рост цен, а это до сих пор еще никому не удавалось. Если же рост цен не учитывать, то отдаленные во времени доходы могут «растаять» в огне инфляции. На практике риски учитывают, увеличивая q на 10 - 20%.

С 1995 г. мы рассчитываем индекс инфляции по независимо собранной информации о ценах на продукты, входящим в одну и ту же потребительскую корзину. В 90-е гг. работа велась по заданию структур Минобороны РФ [230, 268], позже – в рамках научно-учебного комплекса «Инженерный бизнес и менеджмент» МГТУ им. Н.Э. Баумана (в Институте высоких статистических технологий и эконометрики и Лаборатории экономико-математических методов в контроллинге) [200, 219, 237]. При ретроспективном анализе переход к сопоставимым ценам (на основе учета инфляции) позволяет получить обоснованные выводы об эффективности уже осуществленного проекта, прогнозирование же индекса инфляции позволяет оценить будущие финансовые потоки в номинальных ценах.

Проблема горизонта планирования в инвестиционном менеджменте. Во многих ситуациях продолжительность проекта не определена объективно (типичная ситуация для инноваций налоговой системы) либо горизонт планирования инвестора не охватывает всю продолжительность реализации проекта до этапа утилизации. В таких случаях важно изучить влияние горизонта планирования на принимаемые решения (см. раздел 2.4).

От горизонта планирования зависят принимаемые решения. Например, при коротком периоде планирования целесообразны лишь инвестиции (капиталовложения) в оборотные фонды предприятия, и лишь при достаточно длительном периоде – в основные фонды. Принимая во внимание зависимость оптимальных решений от горизонта планирования, ряд западных экономистов отказывается рассматривать фирмы как инструменты для извлечения прибыли. Они предпочитают рассматривать организации (предприятия) как структуры, аналогичные живым существам. Живые существа не стремятся к прибыли, у них другие цели. Прежде всего они стараются обеспечить свое нынешнее и будущее существование и развитие. Речь идет об известной на Западе гипотезе Гэлбрейта – Баумола - Марриса (*Galbraith – Baumol - Marris*), в соответствии с которой в основе поведения корпораций лежит стремление к «максимальному росту», а не к «максимальной прибыли» [279, с.403].

Из сказанного выше вытекает, что формальные методы оценки инвестиционных проектов и их рисков во многих случаях (реально во всех нетривиальных ситуациях) не могут дать однозначных рекомендаций. Поэтому процедуры экспертного оценивания нужно применять не только на заключительном этапе, но и на всех остальных этапах анализа инвестиционного проекта. При этом необходимо использовать весь арсенал теории и практики экспертных оценок. Система поддержки принятия решений в области управления инвестициями, а также, например, совершенствования налогообложения, оценки управляющих воздействий на процессы налогообложения (работа выполнена под нашим руководством по заданию Государственной налоговой службы РФ [132]) должна сочетать формально-экономические и экспертные процедуры.

Модель оптимизации моментов выпуска продукции на рынок. Рассмотрим эскизную (в смысле В.В. Налимова [149]) экономико-математическую модель, позволяющую рассчитать оптимальные моменты выпуска на рынок новых моделей продукции (использована при разработке РД 50-217-84 «Методические указания по оценке научно-технического уровня стандартов на промышленную продукцию» [269]). Рис.5.1 дает возможность сравнить динамику мирового уровня качества и уровня качества продукции конкретного предприятия.

Мировой уровень качества непрерывно растет, в то время как уровень качества продукции конкретного предприятия меняется скачкообразно. Он заметно увеличивается при выпуске на рынок новой марки продукции, а затем остается постоянным вплоть до выпуска следующей марки. В течение жизненного цикла очередной марки продукции ее уровень качества сначала заметно выше мирового, затем преимущество уменьшается, наконец, уровень качества оказывается ниже мирового, и через некоторое время марка снимается с производства.

В какие оптимальные моменты t_1, t_2, t_3, … выпускать на рынок новые марки продукции? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо сформировать функционал, который будем оптимизировать, выбирая моменты t_1, t_2, t_3, …

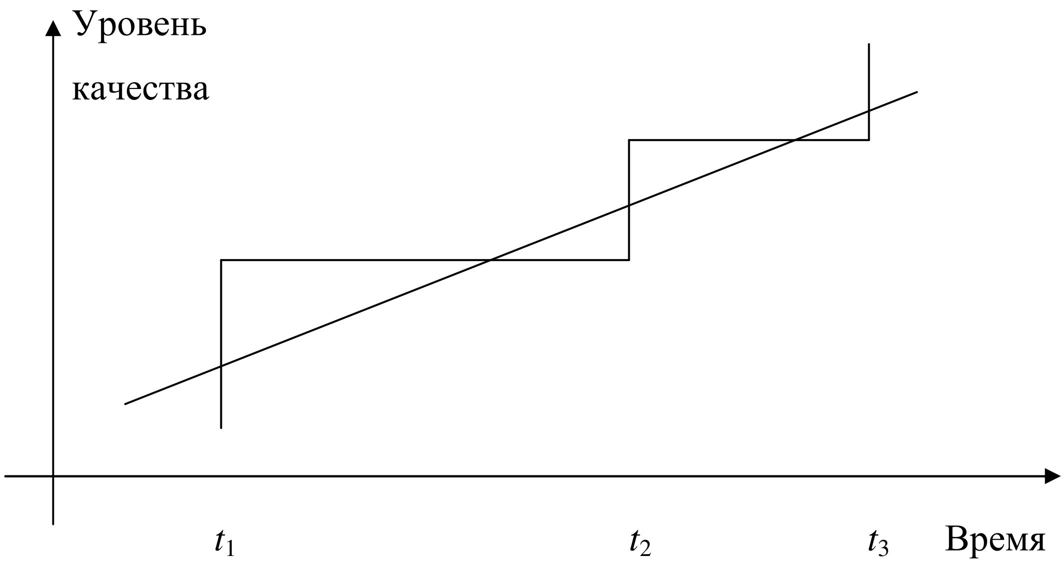


Рис.5.1. Сравнение динамики мирового уровня качества и уровня качества продукции конкретного предприятия.

В качестве модели рынка примем модель чистой (совершенной) конкуренции. В соответствии с ней вклад конкретного предприятия в объем мирового рынка бесконечно мал, а цены определяются мировым уровнем качества. Самым лучшим для предприятия был бы выпуск продукции на этом уровне. К сожалению, это невозможно по технологическим причинам. Пусть d – стоимость осуществления скачка, т.е. разработки и подготовки к производству очередной марки (модификации) продукции. Примем для простоты, что стоимости скачков любой величины одинаковы.

Предположим, что изменение во времени мирового уровня качества рассматриваемой продукции $P_0(t)$ можно описать линейной функцией:

$P_0(t) = a_0 + at$.

Превышение мирового уровня не приносит предприятию дополнительного дохода. Поэтому предположим, что дополнительные затраты на превышение уровня качества $P(t)$ выпускаемой продукции сверх мирового уровня пропорциональны этому превышению, т.е. за время $(t; t + dt)$ равны

$b\ (P(t) - P_0(t))\ dt$,

где b – коэффициент пропорциональности и $P(t) > P_0(t)$.

При отставании уровня качества продукции от мирового предприятие несет заметные убытки, в частности, ему приходится снижать цены. Пусть потери от морального старения продукции пропорциональны отставанию от мирового уровня качества, т.е. за время $(t; t + dt)$ равны

$c\ (P(t) - P_0(t))\ dt$,

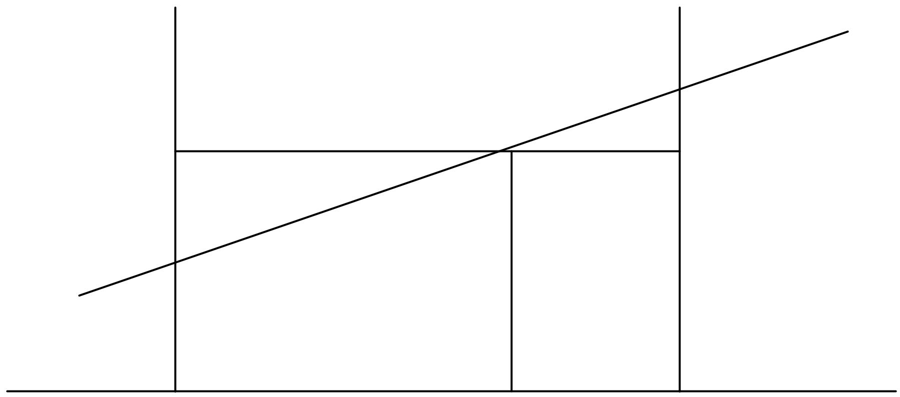
где c – коэффициент пропорциональности и $P(t) < P_0(t)$.

Функционал, который будем оптимизировать, выбирая моменты t_1, t_2, t_3, … и соответствующие величины скачков, равен сумме расходов на запуск новых марок, затрат на превышение уровня качества $P(t)$ выпускаемой продукции сверх мирового и потерь от морального старения продукции ввиду отставания от мирового уровня качества. Пусть за время $[0; T)$ выпущено на рынок $n = n(\mathrm{T})$ новых марок. Тогда функционал имеет вид

$nd + bS_1 + cS_2$,

где S_1 – суммарная площадь треугольников, образованных графиками $P(t)$ и $P_0(t)$ и расположенных выше прямой $a_0 + at$, а S_2 – суммарная площадь треугольников, образованных графиками $P(t)$ и $P_0(t)$ и расположенных ниже прямой $a_0 + at$.

Минимизацию затрат проведем в три этапа. На первом этапе зафиксируем моменты t_1, t_2, t_3, … Рассмотрим два соседних момента t_k и t_{k+1}. Положим $\Delta = t_{k+1} - t_k$. Тогда ситуация полностью описана, если задан промежуток времени δ такой, что в момент $t_k + \delta$ уровень качества выпускаемой предприятием продукции совпадает с мировым уровнем качества (рис.5.2).



t_k $t_k + \delta$ t_{k+1}

Рис.5.2. Оптимизация величин скачков

Меняя величину δ, мы изменяем высоту рассматриваемой «ступеньки» графика $P(t)$, не влияя на остальные «ступеньки». В результате можно провести локальную оптимизацию высоты «ступенек» при заданных моментах t_1, t_2, t_3, … выпуска на рынок очередных марок. Задача локальной оптимизации допускает декомпозицию, т.е. разбивается на задачи оптимизации для каждой ступеньки по отдельности.

За промежуток времени Δ затраты, связанные с превышением уровня качества сверх мирового, как видно из рис.5.2, равны

$$b\frac{a\delta^2}{2},$$

а потери из-за морального старения (при отставании от мирового уровня) равны

$$c\frac{a(\Delta-\delta)^2}{2}.$$

Следовательно, суммарные потери за рассматриваемый интервал времени момента $[t_k; t_{k+1})$ равны

$$f(\delta)=d+a\left(b\frac{\delta^2}{2}+c\frac{(\Delta-\delta)^2}{2}\right).$$

Выбирая δ оптимальным образом, минимизируем суммарные затраты и потери за рассматриваемый интервал времени. Продифференцировав функцию $f(\delta)$ по δ и приравняв производную 0, получим оптимальное значение δ, а именно:

$$\delta=\frac{c\Delta}{b+c}.$$

При оптимальном δ затраты за период с t_k до t_{k+1}, как нетрудно подсчитать, равны

$$d+\frac{abc}{2(b+c)}\Delta^2.$$

На втором этапе оптимизации зафиксируем число скачков и найдем при этом условии оптимальные моменты скачков t_1, t_2, t_3, … Положим $\Delta_j = t_{j+1} - t_j$, где $j = 1, 2, \ldots, n$, причем примем $t_{n+1} = T$, где T – горизонт планирования. Тогда суммарные затраты за весь рассматриваемый интервал планирования равны

$$g(\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n) = \frac{abc}{2(b+c)}(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_n^2)+nd.$$

Эту функцию необходимо минимизировать по всем n неотрицательным переменным Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, при условии $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n = T$. Как известно [213, 216], минимум достигается при

$$\Delta_i = \frac{T}{n}, \; i = 1,2,...,n.$$

При фиксированном числе скачков n минимальное значение суммарных затрат равно

$$h(n) = \frac{abc}{2(b+c)} \frac{T^2}{n} + nd.$$

На третьем этапе оптимизации надо найти оптимальное число скачков n, или, что эквивалентно, интервал между скачками Δ. Суммарные удельные затраты, приходящиеся на одну единицу времени, имеют вид

$$h_1(n) = \frac{h(n)}{T} = \frac{abc}{2(b+c)} \frac{T}{n} + \frac{n}{T} d.$$

Перейти к переменной $\Delta = T/n$. Удельные затраты равны

$$H(\Delta) = \frac{abc}{2(b+c)} \Delta + \frac{d}{\Delta}.$$

Минимизируем эту функцию по Δ. Дифференцируя по Δ и приравнивая производную 0, получаем, что оптимальный интервал между скачками

$$\Delta = \sqrt{\frac{2(b+c)d}{abc}}.$$

Полученная формула позволяет делать как количественные, так и качественные выводы. Например, если мировой уровень качества практически не меняется (т.е. $a \to 0$), то интервал между выпуском новых марок очень большой (т.е. $\Delta \to +\infty$). Полученная формула напоминает формулу Вильсона (в других источниках – формула квадратного корня) в теории управления запасами – части логистики (см. раздел 5.5).

Отметим, что проведенные на третьем этапе рассуждения не вполне корректны. Минимизация проводилась по всем положительным Δ, а на самом деле Δ должно лежать в дискретном множестве $\{T/n, n = 1, 2, \dots \}$. Поэтому оптимальное Δ – одно из значений Δ_1 и Δ_2, где

$$\Delta_1 = \frac{T}{n+1} \le \sqrt{\frac{2(b+c)d}{abc}} < \frac{T}{n} = \Delta_2,$$

а именно, то из них, для которого значение функции $H(\Delta)$ меньше. Эффекты, связанные с дискретностью Δ, в случае модели Вильсона управления запасами рассмотрены в разделе 5.5, а также в [170, 213, 216]. В частности, установлено, что при увеличении T влияние этих эффектов уменьшается.

Место включенных в настоящий раздел конкретных научных результатов в общей проблематике управления инновациями и инвестициями на промышленных предприятиях рассмотрено в [207, 213, 257]. Их необходимо использовать при оценке эффективности инвестиционных проектов, прри управлении инновационными проектами в различных отраслях народного хозяйства.

5.4. Разработка новых статистических методов и моделей управления качеством промышленной продукции

Разработка ЭММиМ управления качеством – предмет раздела 5.4. Исследования опираются на разработанную нами концепцию стандартизации статистических методов управления качеством промышленной продукции [181, 186]. Статистические инструменты (т.е. методики, программные продукты) должны изготавливаться специалистами в области статистических методов, согласовываться с ведущими научными организациями в этой области (т.е. проходить сертификацию), а потому такие статистические инструменты должны иметь статус, признанный государством. Выделены основные характеристики статистических методов и сформулировать требования к этим методам (к значениям характеристик). Например, одно из требований: выводы должны быть инвариантны относительно допустимых преобразований шкал измерения.

Центром статистических методов и информатики под нашим руководством разработана система методических и нормативных документов, программных продуктов (диалоговые системы СПК, АТСТАТ-ПРП, СТАТКОН, АВРОРА-РС, ЭКСПЛАН, ПАСЭК, НАДИС и др.) по организационно-экономическим методам и моделям управления качеством [182, 184, 186]. Нами выполнен ряд исследований отдельных проблем, в том числе по обоснованию планов статистического приемочного контроля по альтернативному признаку при минимизации суммарных затрат, по статистическому контролю бесформенной (жидкой, газообразной, порошкообразной, сыпучей, тестообразной и т.п.) продукции. Получены выражения для приемочного и браковочного уровней дефектности при большом объеме выборки, решены задачи синтеза планов контроля по заданным значениям указанных характеристик, а также предела среднего выходного уровня дефектности. На основе теории люсианов разработаны модели и методы статистического контроля по двум альтернативным признакам [200, 210].

По мнению Каору Исикава, президент промышленного института Мусаси, заслуженный профессор Токийского университета [299, с.15]: «Методы статистики - именно то средство, которое необходимо изучить, чтобы внедрить управление качеством. Они - наиболее важная составная часть комплексной системы всеобщего управления качеством на фирме. В японских корпорациях все, начиная от председателя Совета Директоров и до рядового рабочего в цехе, обязаны знать хотя бы основы статистических методов». Более 150 лет статистические методы применяются в России для проверки соответствия продукции установленным требованиям, т.е. для сертификации. Так, еще в 1846 г. действительный член Петербургской академии наук М.В. Остроградский рассматривал задачу статистического контроля партий мешков муки или штук сукна армейскими поставщиками [46]. С тех пор в России в статистическом контроле качества сделано многое, особенно в области теории. Так, монографии Ю.К. Беляева [11] и Я.П. Лумельского [124] являются классическими. Выпущен ряд практических руководств, в основном переводных. С начала 1970-х годов в

СССР стали разрабатываться государственные стандарты по статистическим методам. В связи с обнаружением в них грубых ошибок 24 из 31 государственного стандарта по статистическим методам отменены в 1986-87 гг. (перечень стандартов и описание ошибок приведены в работе [186]).

Выделяют различные виды контроля - входной контроль сырья и материалов, приемочный контроль готовой продукции, а также контроль при передаче полуфабрикатов и комплектующих из цеха в цех. Кроме сплошного контроля применяют выборочный. При разрушающем контроле необходимо пользоваться выборочными методами и судить о качестве партии продукции по результатам контроля выборки. Выборочные методы контроля могут применяют и из экономических соображений, когда стоимость контроля высока по сравнению со стоимостью изделия. Для проведения выборочного контроля необходимо сформировать выборку, выбрать план контроля. Анализ и синтез планов проводят с помощью ЭММиМ на основе теории вероятностей и математической статистики, применяя компьютерные диалоговые системы (пакеты программ) [196].

Экономическая эффективность статистических методов обеспечения качества. По оценкам, полученным в работе [177], применение современных статистических методов позволяет в среднем вдвое сократить трудозатраты на контрольные операции (принято считать. что на них приходится примерно 10% от стоимости машиностроительной продукции). Следовательно, от повышения эффективности решений менеджеров на основе внедрения современных ЭММиМ обеспечения качества продукции Россия может получить более 150 млрд. руб. дополнительного дохода в год.

Приведем ещё три сообщения о высокой экономической эффективности статистического контроля.

1) «Мы документально зафиксировали экономию от применения методов статистического контроля и методов принятия решений, которым

обучили наших сотрудников. Мы приближаемся к степени окупаемости около 30 долларов на 1 вложенный доллар. Вот почему мы получили такую серьезную поддержку от высшего руководства», - сообщает Б. Вигенхорн, ответственный за подготовку специалистов фирмы «Моторола» [356].

2) По подсчетам профессора Массачусетского технологического института Фримена (см. [46]), только статистический приемочный контроль давал промышленности США 4 миллиарда долларов в 1958 г., т.е. 0,8% ВВП.

3) В XXI веке основное внимание исследователей и управленцев переносится с разработки отдельных методов принятия решений на системы внедрения таких методов в практическую деятельность предприятий и организаций. Примером является система «Шесть сигм». Это более разумный способ управлять всей компанией или отдельным ее подразделением (например, литейным цехом или центральной заводской лабораторией). Фактически речь идет о развитии системы управления качеством и контроллинга на предприятии, в организации, фирме, компании [245]. Концепция «Шесть сигм» ставит на первое место потребителя товаров и услуг и помогает, как доказывают ее разработчики, находить самые лучшие решения, опираясь на факты и данные. Она нацелена на три основные задачи:

- повысить удовлетворенность клиентов;
- сократить время цикла (производственного, операционного);
- уменьшить число дефектов.

Внедрение «Шести сигм» дает значительный экономический эффект. Исполнительный директор корпорации *General Electric* Джек Уэлч объявил в ежегодном докладе, что всего за три года система «Шесть сигм» сэкономила компании более 2 миллиардов долларов [245].

О теории статистического контроля. Выборочный контроль, построенный на научной основе, т.е. исходящий из теории вероятностей и математической статистики, называют статистическим контролем. Предпринимателя и менеджера выборочный контроль может интересовать не только в связи с качеством продукции, но и в связи, например, с контролем экологической обстановки, поскольку зафиксированные государственными органами экологические нарушения влекут штрафы и иные последствия [290, 312]. Или в связи с выборочным контролем документации [334].

Обсудим основные подходы статистического контроля.

При статистическом контроле решение о генеральной совокупности – об экологической обстановке в данном регионе или о партии продукции - принимается по выборке, состоящей из некоторого количества единиц (единиц экологического контроля или единиц продукции). Следовательно, выборка должна представлять партию, т.е. быть репрезентативной (представительной). Наиболее распространенными являются две вероятностные модели выборки - биномиальная и гипергеометрическая. В первой из них предполагается, что результаты контроля n единиц можно рассматривать как совокупность n независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2,....,X_n$, где $X_i = 1$, если i-ое измерение показывает, что имеется нарушение, т.е. превышено ПДК (предельная норма концентрации) или i-ое изделие дефектно, и $X_i = 0$, если это не так. Тогда число X превышений ПДК (при другой интерпретации - дефектных единиц продукции в партии) равно $X= X_1+ X_2+...+ X_n$.Известно, что распределение X имеет биномиальное распределение. Согласно теореме Муавра-Лапласа при увеличении объема выборки n распределение X сближается с нормальным распределением.

Вторая модель - гипергеометрическая - соответствует случайному отбору единиц в выборку. Пусть среди N единиц, составляющих генеральную совокупность, имеется D дефектных. Случайность отбора означает, что каждая единица имеет одинаковые шансы попасть в выборку. Более того, ни одна пара единиц не имеет преимущества перед любой другой парой при отборе в выборку. То же самое — для троек, четверок и т.д. Итак, каждое из C_N^n сочетаний по *n* единиц из *N* имеет одинаковую вероятность быть отобранным в качестве выборки, равную, очевидно, $1/C_N^n$.

Отбор случайной выборки согласно описанным правилам организуют при проведении различных лотерей. Пусть *Y* —число дефектных единиц в такой выборке. Известно, что распределение *Y* – гипергеометрическое, т.е.

$$P(Y=k)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Биномиальная и гипергеометрическая модели *весьма близки*, когда объем генеральной совокупности (партии) по крайней мере в 10 раз превышает объем выборки. Таким образом, можно констатировать, что

$P(X = k) = P(Y = k)$,

с достаточной для практики точностью, если объем выборки мал по сравнению с объемом партии. При этом в качестве $p = P(X_i = 1)$ берут D/N.

Близость результатов, получаемых с помощью биномиальной и гипергеометрической моделей, весьма важна с методологической точки зрения. Эти модели исходят из принципиально различных методологических предпосылок. В биномиальной модели случайность *присуща каждой единице* - она с какой-то вероятностью дефектна, а с какой-то - годна. В то же время в гипергеометрической модели качество определенной единицы детерминировано, задано, а случайность проявляется лишь *в отборе*, вносится инженером, экологом или экономистом при составлении выборки. В науках о человеке противоречие между двумя рассматриваемыми моделями выборки еще более выражено. Биномиальная модель предполагает, что поведение человека, в частности, выбор им определенного варианта при ответе на вопрос, определяется с участием случайных причин. Например, человек может случайно сказать «да», случайно — «нет». Некоторые специалисты отрицают присущую поведению человека случайность. Они верят в причинность и считают поведение конкретного человека практически полностью определенным (детерминированным) его взглядами, жизненным опытом, окружающей средой. Поэтому принимают гипергеометрическую модель и считают, что случайность отличия ответов в выборке от ответов во всей генеральной совокупности определяется всецело случайностью, вносимой при отборе единиц наблюдения в выборку.

Биномиальная модель легче для теоретического изучения, поэтому будем её рассматривать в дальнейшем. Однако при реальном контроле лучше формировать выборку, исходя из гипергеометрической модели. Это делают, выбирая номера изделий (для включения в выборку) с помощью датчиков псевдослучайных чисел или таблиц псевдослучайных чисел. Алгоритмы формирования выборки встраивают в современные программные продукты.

Планы статистического контроля и правила принятия решений. Под планом статистического контроля понимают алгоритм, т.е. правила действий при контроле качества. На «входе» при этом - генеральная совокупность (партия продукции), а на «выходе» - одно из двух решений: «принять партию» либо «забраковать партию». Рассмотрим примеры.

Одноступенчатые планы контроля (n,c): отобрать выборку объема n; если число дефектных единиц в выборке X не превосходит c (приемочное число), то партию принять, в противном случае забраковать. Частные случаи: план $(n,0)$ —партию принять тогда и только тогда, когда все единицы в выборке являются годными; план $(n,1)$ - партия принимается, если в выборке все единицы являются годными или ровно одно - дефектное, во всех остальных случаях партия бракуется.

Двухступенчатый план контроля $(n, a, b) + (m, c)$: отобрать первую выборку объема n; если число дефектных единиц в первой выборке X не превосходит a, то партию принять; если число дефектных единиц в первой выборке X больше или равно b, то партию забраковать; во всех остальных случаях, т.е. когда X больше a, но меньше b, следует взять вторую выборку объема m; если число дефектных единиц во второй выборке Y не превосходит c, то партию принять, в противном случае забраковать.

Оперативная характеристика плана статистического контроля. Свойства плана статистического контроля определяются с помощью функции $f(p)$, связывающей вероятность p дефектности единицы контроля с вероятностью $f(p)$ приемки партии (положительной оценки экологической обстановки или заключения о правильности ведения бухгалтерской документации по результатам контроля). При этом вероятность p того, что конкретная единица дефектна, называется входным уровнем дефектности, а $f(p)$ - оперативной характеристикой плана контроля. Если дефектные единицы отсутствуют, $p = 0$, то партия всегда принимается, т.е. $f(0) = 1$. Если все единицы дефектные, $p = 1$, то партия наверняка бракуется, $f(1) = 0$. Между этими крайними значениями p функция $f(p)$ монотонно убывает. При изучении свойств плана входной уровень дефектности p - свободный параметр, он может принимать любые значения между 0 и 1.

Вычислим оперативную характеристику плана $(n,0)$:

$f(p) = P(X=0) = (1—p)^n$.

Для плана $(n,1)$ оперативная характеристика, как легко видеть, такова:

$f(p) = P(X=0)+P(X=1) = (1—p)^n + np\,(1—p)^{n-1}$.

Для плана (20, 0, 2) + (40, 0):

$f(p) = (1—p)^{20}+ 20p(1—p)^{59}$.

При практическом применении методов статистического приемочного контроля для нахождения оперативных характеристик планов контроля кроме формул, имеющих обозримый вид лишь для отдельных видов планов, применяют численные алгоритмы или заранее составленные таблицы.

С оперативной характеристикой связаны важные понятия *приемочного и браковочного уровней дефектности*, а также понятия *«риск поставщика»* и *«риск потребителя»*. На оперативной характеристике выделяют две характерные точки, делящие входные уровни дефектности на три зоны (области) - *А*, *Б* и *В*. В зоне *А* почти всегда все хорошо для поставщика, а именно - почти всегда экологическая обстановка признается благополучной, почти все партии принимаются. В зоне *В*, наоборот, почти всегда все плохо для потребителя, а именно - почти всегда экологический контроль констатирует экологические нарушения, почти все партии бракуются. Зона *Б* - буферная, переходная, промежуточная, в ней как вероятность приемки, так и вероятность браковки заметно отличаются от 0 и 1. Для задания границ между зонами выбирают два малых числа—риск поставщика (производителя, предприятия) α и риск потребителя (заказчика, системы экологического контроля) β, границы между зонами задают два уровня дефектности - приемочный $p_{пр}$ и браковочный $p_{бр}$, определяемые из уравнений

$$f(p_{пр}) = 1 - \alpha, \; f(p_{бр}) = \beta.$$

Таким образом, если входной уровень дефектности не превосходит $p_{пр}$, то вероятность забракования партии мала, т.е. не превосходит α. Приемочный уровень дефектности выделяет зону *А* значений входного уровня дефектности, в которой нарушения экологической безопасности почти всегда не отмечаются, партии почти всегда принимаются, т.е. соблюдаются интересы проверяемого предприятия (в экологии), поставщика (при контроле качества). Это - зона комфортности для поставщика. Если он обеспечивает работу (входной уровень дефектности) в этой зоне, то его практически никогда никто не потревожит.

Если же входной уровень дефектности больше браковочного уровня дефектности $p_{бр}$, то нарушения почти наверняка фиксируются, партия почти всегда бракуется, т.е. экологи узнают о нарушениях, потребитель оказывается защищен от попадания к нему партий со столь высоким уровнем брака. Поэтому можно сказать, что в зоне *B* соблюдаются интересы потребителей - брак к ним не попадает.

При выборе плана контроля часто начинают с выбора приемочного и браковочного уровней дефектности. При этом выбор конкретного значения приемочного уровня дефектности отражает интересы поставщика, а выбор конкретного значения браковочного уровня дефектности - интересы потребителя. Можно доказать (см. ниже), что для любых положительных чисел α и β и любых входных уровней дефектности $p_{пр}$ и $p_{бр}$, причем $p_{пр}$ меньше $p_{бр}$, найдется план контроля (n,c) такой, что его оперативная характеристика $f(p)$ удовлетворяет неравенствам

$$f(p_{пр}) \geq 1 - \alpha,\ f(p_{бр}) \leq \beta.$$

При практических расчетах обычно принимают $\alpha = 0{,}05$ (т.е. 5%) и $\beta = 0{,}1$ (т.е. 10%).

В качестве примера вычислим приемочный уровень дефектности для плана $(n,0)$. Согласно его определению,

$$(1 - p_{пр})^n = 1 - \alpha,\ p_{пр} = 1 - (1 - \alpha)^{1/n}.$$

Поскольку риск поставщика α мал, то

$$\sqrt[n]{1-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{\alpha^2}{n^2}\right) \text{ и } p_{пр} \approx \frac{\alpha}{n}.$$

Для браковочного уровня дефектности имеем

$$p_{бр} = 1 - \beta^{1/n}.$$

При практическом применении методов статистического приемочного контроля кроме аналитических формул, имеющими обозримый вид лишь для отдельных видов планов, для нахождения приемочных и браковочных уровней дефектности планов контроля применяют численные алгоритмы или заранее составленные таблицы. Такие таблицы имеются в нормативно-технической документации или научно-технических публикациях.

Предел среднего выходного уровня дефектности. Обсудим судьбу забракованной партии продукции. В зависимости от ситуации эта судьба может быть разной. Партия может быть утилизирована. Например, забракованная партия гвоздей может быть направлена на переплавку. У партии может быть понижена сортность, и она может быть продана по более низкой цене (при этом результаты выборочного контроля будут использованы не только для констатации того, что не выдержан заданный уровень качества, но и для оценки реального уровня качества). Наконец, партия продукции может быть подвергнута сплошному контролю (для этого обычно привлекают инженеров из всех заводских служб). При сплошном контроле все дефектные изделия обнаруживаются и либо исправляются на месте, либо извлекаются из партии. В результате в партии остаются только годные изделия. Такая процедура называется «контроль с разбраковкой».

При среднем входном уровне дефектности p и применении контроля с разбраковкой с вероятностью $f(p)$ партия принимается (и уровень дефектности в ней по-прежнему равен p) и с вероятностью $(1 - f(p))$ бракуется и подвергается сплошному контролю, в результате чего к потребителю поступают только годные изделия. Следовательно, по формуле полной вероятности средний выходной уровень дефектности равен

$$f_1(p)= pf(p) +0(1 - f(p)) = pf(p).$$

Средний выходной уровень дефектности $f_1(p)$ равен 0 при p=0 и p=1, положителен на интервале (0;1), а потому достигает на нем максимума, который в теории статистического контроля называется пределом среднего выходного уровня дефектности (сокращенно ПСВУД):

$$\text{ПСВУД} = \max_{0\le p\le 1} f_1(p).$$

Пример. Рассмотрим план $(n,0)$. Для него $f(p) = (1 - p)^n$ и $f_1(p) = p(1-p)^n$. Максимум достигается при $p_n = 1/(n+1)$. Следовательно,

$$\text{ПСВУД} = p_n(1-p_n)^n = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e^{-1}=\frac{1}{2{,}718281828...}\approx 0{,}368.$$

то получаем простую асимптотическую формулу

ПСВУД $\approx \dfrac{0{,}368}{n}$.

Для более сложных планов ПСВУД рассчитывают с помощью ЭВМ.

Асимптотическая теория одноступенчатых планов (разработана нами). Пусть X - число дефектных единиц продукции в выборке объема *n,* распределение X является биномиальным, используется одноступенчатый план контроля (*n, c*). Тогда оперативная характеристика этого плана такова:

$$f(p)=\sum_{1\le k\le c}P(X=k)=\sum_{1\le k\le c}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

Пусть $n\to\infty$. Целесообразно найти приближение с помощью теоремы Муавра-Лапласа. Имеем цепочку тождественных преобразований:

$$f(p)=P(X\le c)=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{c-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Справа строит именно то выражение, которое участвует в теореме Муавра-Лапласа. Воспользовавшись равномерной сходимостью, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}f(p)=\Phi\left(\frac{c-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

где $\Phi(x)$ - функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Последняя формула позволяет указать асимптотические выражения для приемочного и браковочного уровней дефектности. Действительно, согласно определениям этих понятий

$$\Phi\left(\frac{c-np_{пр}}{\sqrt{np_{пр}(1-p_{пр}))}}\right)=1-\alpha,\quad \Phi\left(\frac{c-np_{бр}}{\sqrt{np_{бр}(1-p_{бр}))}}\right)=\beta, \qquad (5.1)$$

откуда с помощью элементарных преобразований получаем, что

$$p_{пр} = \frac{c}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{c}{n}\left(1-\frac{c}{n}\right)}\Phi^{-1}(1-\alpha), \quad p_{бр} = \frac{c}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{c}{n}\left(1-\frac{c}{n}\right)}\Phi^{-1}(\beta). \qquad (5.2)$$

Так как величины *c/n* и *p* близки друг к другу, то при переходе от формулы (5.1) к формуле (5.2) в подкоренных выражениях приемочный и браковочный уровни дефектности заменены на *c/n* (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка).

Поскольку при практическом применении статистического приемочного контроля принимают α= 0,05, β=0,10, то в предыдущие формулы следует подставить $\Phi^{-1}(0{,}95)$=1,64 и $\Phi^{-1}(0{,}10) = -1{,}28.$ Итак, итоговые формулы для приемочного и браковочного уровней дефектности имеют вид

$$p_{пр} = \frac{c}{n} - \frac{1{,}64}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{c}{n}\left(1-\frac{c}{n}\right)}, \quad p_{бр} = \frac{c}{n} + \frac{1{,}28}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{c}{n}\left(1-\frac{c}{n}\right)}.$$

Перейдем к задаче синтеза. Пусть заданы приемочный и браковочный уровни дефектности. Требуется построить одноступенчатый план, имеющий эти характеристики. Из формул (5.1) следует, в частности, что

$$c - np_{пр} = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{np_{пр}(1-p_{пр})}, \quad c - np_{бр} = \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{np_{бр}(1-p_{бр})}. \qquad (5.3)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем, что

$$np_{бр} - np_{пр} = \sqrt{n}\{\Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{p_{пр}(1-p_{пр})} - \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{p_{бр}(1-p_{бр})}\}.$$

Следовательно, оценка $n*$ необходимого объема выборки имеет вид

$$n* = \left(\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{p_{пр}(1-p_{пр})} - \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{p_{бр}(1-p_{бр})}}{p_{бр} - p_{пр}}\right)^2.$$

Для стандартных значений рисков α = 0,05, β = 0,10 имеем:

$$n* = \left(\frac{1{,}64\sqrt{p_{пр}(1-p_{пр})} + 1{,}28\sqrt{p_{бр}(1-p_{бр})}}{p_{бр} - p_{пр}}\right)^2 \qquad (5.4)$$

С помощью уравнений (5.3) найдем оценку *c** приемочного числа, заменив неизвестный объем выборки на его оценку *n**:

$$c* = n*\, p_{бр} + \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{n*\, p_{бр}(1-p_{бр})}.$$

Для стандартного значения β = 0,10 имеем

$$c^* = n^* p_{бр} - 1{,}28\sqrt{n^* p_{бр}(1 - p_{бр})}. \qquad (5.5)$$

Итак, по формуле (5.4) можно рассчитать оценку объема выборки, затем по формуле (5.5) найти оценку приемочного числа.

Пример. Пусть $p_{пр} = 0{,}02$, $p_{бр} = 0{,}09$. Тогда по формуле (5.4) оценка объема выборки равна

$$n^* = \left(\frac{1{,}64\sqrt{0{,}02(1-0{,}02)} + 1{,}28\sqrt{0{,}09(1-0{,}09)}}{0{,}09 - 0{,}02}\right)^2 = \left(\frac{1{,}64 \times 0{,}14 + 1{,}28 \times 0{,}286}{0{,}07}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{0{,}2296 + 0{,}3661}{0{,}07}\right)^2 = \left(\frac{0{,}5957}{0{,}07}\right)^2 = 8{,}51^2 = 72{,}42.$$

Полученное число не является натуральным, поэтому откорректируем объем выборки до ближайшего целого, т.е. до $n^* = 72$.

Оценку приемочного числа находим по формуле (5.5):

$$c^* = 72 \times 0{,}09 - 1{,}28\sqrt{72 \times 0{,}09 \times 0{,}91} = 6{,}48 - 1{,}28 \times 2{,}428 = 3{,}37.$$

Полученное число не является целым, поэтому в качестве приемочного числа надо взять ближайшее целое, т.е. до 3.

Если объем выборки округлить до 73, то аналогично получим

$$c^{**} = 73 \times 0{,}09 - 1{,}28\sqrt{73 \times 0{,}09 \times 0{,}91} = 6{,}57 - 1{,}28 \times 2{,}445 = 3{,}44.$$

При округлении снова получаем 3.

С помощью первого из уравнений (5.3) можно построить оценку c^* на основе приемочного уровня дефектности:

$$c^* = n^* p_{пр} + \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{n^* p_{пр}(1 - p_{пр})} = n^* p_{пр} + 1{,}64\sqrt{n^* p_{пр}(1 - p_{пр})}.$$

Подставив конкретные значения, получим почти ту же оценку, что и раньше:

$$c^* = n^* p_{пр} + 1{,}64\sqrt{n^* p_{пр}(1 - p_{пр})} = 72 \times 0{,}02 + 1{,}64\sqrt{72 \times 0{,}02 \times 0{,}98} = 3{,}39.$$

Итак, в результате асимптотических расчетов найден одноступенчатый план (72, 3).

Замечание. До сих пор постоянно говорилось о контроле единиц и партий продукции. Однако нет никакого принципиального отличия с контролем услуг (медицинских, туристических, транспортных, образовательных, банковских и иных) или документации. Поэтому теория и практика статистического контроля качества продукции дает полезные рекомендации для банковского дела и бухгалтерского аудита [334]. Надо только заменить термины, описывающие предметную область применения теории статистического контроля. Подробнее об алгоритмах анализа, синтеза и оптимизации планов статистического контроля рассказано в специальной литературе, в частности, в работах [46, 95, 112, 124, 177, 289]. Отметим выполненную нами разработку методов статистического контроля по двум альтернативным признакам на основе проверки статистической гипотезы их независимости по совокупности малых выборок [192].

Выделение единиц бесформенной (жидкой, газообразной) продукции. В предыдущем изложении постоянно встречается термин «единица продукции». Он ясен, если речь идет об отдельных изделиях - дискетах, коробках спичек, патронах, бутылках минеральной воды, электробритвах, или отдельных деталях - болтах, гвоздях, пластмассовых дисках… Однако многие виды продукции имеют иной вид - газообразный, жидкий или, как говорят, бесформенный (порошкообразный, желеобразный,…). Как быть с ними? В работе [104] разработан подход, позволяющий применить к бесформенной продукции методы статистического контроля качества.

Основное - это выделить единицу продукции. Она не должна быть очень малой, поскольку ясно, что в бесформенной продукции свойства вещества в близких точках близки. Основная идея состоит в том, чтобы взять некоторое количество пар точек, отстоящих друг от друга на определенное расстояние, и выяснить, есть связь между значениями изучаемого свойства в этих парах точек или нет (в статистических терминах - значимо ли отличается от 0 ранговый коэффициент корреляции Спирмена). Если связь есть, значит, точки разнесены на недостаточное расстояние, другими словами, точки относятся к одной и той же единице продукции. Поэтому расстояние между точками надо увеличить. Если связь уже не обнаруживается, то это значит, что они относятся к разным единицам продукции. В процессе увеличения расстояния тем самым была оценена величина ребра куба, в виде которого условно представляем себе единицу бесформенной продукции. Разбив бесформенную продукцию на единицы, можно применять описанные выше подходы для контроля ее качества (подробнее см. [104]).

Организационно-экономическое моделирование при решении экологических задач промышленного предприятия. Разработаны модели и методы эколого-экономического анализа, функционирования организационно-экономического механизма управления природопользованием и экологической безопасностью [243]. Речь идет о статистическом контроле при экологическом мониторинге и контроле экологических требований [312], механизмах и принципах управления качеством природопользования [290], разработке экспертных методов, в том числе АРМ МАТЭК (МАТематика в Экспертизе) [349], и их применении при решении задач экологического страхования [194] и обеспечения химической безопасности [231]. В частности, для решения задач в этой области был предложен новый метод экспертных оценок – метод согласования кластеризованных ранжировок [55].

Получен ряд новых результатов в области оценки, анализа и управления риском [242], в том числе в связи с задачами управления экологической безопасностью [321]. Обосновано растущее значение экологии в социально-экономическом устройстве общества XXI века [345]. С информационно-правовой точки зрения оценен Киотский договор [240]. Проанализированы социально-экологические аспекты управления в условиях современной экономики [238], показано, что менеджменту промышленных предприятий при разработке управленческих решений необходимо учитывать экологические факторы.

Отметим три конкретных области применения разработанных нами устойчивых ЭММиМ в рассматриваемой области:

1. Применение экспертных оценок в области охраны окружающей среды и обеспечения экологической безопасности.

2. Методы анализа результатов экологического мониторинга и контроля (прежде всего по альтернативному признаку).

3. Организационно-экономические методы экологического страхования.

В настоящее время проблемы экологического страхования (как и экологического менеджмента в целом) активно разрабатываются [54, 139, 145, 194, 242, 243, 248, 285, 321, 331, 344, 346] теоретиками и практически работающими менеджерами как в нашей стране, так и в других странах (например, в Германии и США). Условием широкого внедрения является качественное правовое обеспечение. В частности, процедуры экспертного оценивания в области экологического страхования должны иметь соответствующий правовой статус. С утверждением соответствующих законов рынок страховых услуг в экологии значительно расширится.

5.5. Модели управления материальными ресурсами промышленного предприятия

В разделе 5.5 рассмотрены три разработанных и развитых нами ЭММиМ управления материальными ресурсами промышленного предприятия. Для классической модели Вильсона управления материальными ресурсами впервые строго поставлена и решена задача оптимизации в постановке естественной общности, выявлен ряд неклассических эффектов. Например, оказалось, что формула квадратного корня, как правило, не дает оптимальный план, а только асимптотически оптимальный. Изучение устойчивости позволило получить практически полезные выводы. Так, внедрение модели Вильсона в практику управления запасами на Реутовской химбазе дает возможность снизить издержки по доставке и хранению кальцинированной соды не менее чем в 2,1 раза.

Разработана двухуровневая модель управления материальными ресурсами промышленного предприятия для случая нестационарного спроса, найдены оптимальные значения управляющих параметров, установлена их устойчивость относительно изменения горизонта (интервала) планирования.

В модели планирования оптимальных размеров поставок и начального запаса установлены асимптотические свойства модели и проведена декомпозиция задачи оптимизации, что позволило получить ее решение.

Логистика и управление запасами. На примере какой предметной области можно наиболее выпукло продемонстрировать методологию организационно-экономического моделирования и разработки оптимальных методов в экономике и управлении? Для ответа на этот вопрос в ЦЭМИ РАН были проанализированы различные области экономики и управления. Остановились на методах управления запасами, основанных на классической модели Вильсона [166]. Эти методы успешно применяются на практике (см., например, [293, 294]).

Теория управления запасами – часть логистики. Среди всего многообразия логистических проблем [41, 53, 64, 67, 68, 98, 103, 106, 121, 122, 157, 165, 250, 259, 261, 265, 270, 284, 301] в соответствии с тематикой диссертационного исследования нас интересует ЭММиМ, направленные модернизацию управления материальными ресурсами промышленного предприятия. Это прежде всего задачи управления запасами, находящимися в складской системе предприятия. Речь идет об управлении запасами сырья, материалов и комплектующих, полуфабрикатов собственного изготовления на всех этапах технологических процессов, готовой продукции, а также управления на вспомогательных складах (брака, отходов и т.п.). Управлению запасами посвящена обширная литература [23, 24, 116, 255, 267, 271, 272, 280, 281, 300, 309, 326, 328, 330]. Рассмотрим три разработанных нами сюжета.

Математическая теория управления запасами является крупной областью ЭММиМ, получившей свое развитие, в основном, начиная с пятидесятых годов XX века. Предложенная в 1915 г. Ф.Харрисом классическая модель теории управления запасами, называемая также моделью Вильсона (в связи с тем, что получила известность после публикации работы Р.Г.Вильсона в 1934 г.), является одним из наиболее простых и наглядных примеров применения математического аппарата для принятия решений в экономической области. В то же время формула оптимального размера заказа, полученная в модели Вильсона, широко применяется на различных этапах производства и распределения продукции, поскольку оказывается практически полезной для принятия решений при управлении запасами, в частности, приносящей заметный экономический эффект [170]. Рассмотрим эту модель.

Классическая модель управления запасами. Пусть $y(t)$ – величина запаса некоторого товара на складе в момент времени t, $t \geq 0$. Дефицит не допускается, т.е. $y(t) \geq 0$ при всех t. Товар пользуется равномерным спросом с интенсивностью μ, т.е. за интервала времени Δt со склада извлекается и поступает потребителям часть запаса величиной $\mu \Delta t$ В моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2,… пополняется запас на складе – приходят поставки величиной Q_0, Q_1, Q_2,… соответственно. Изменение во времени величины запаса $y(t)$ товара на складе изображается зубчатой ломаной линией (рис.5.3), состоящей из наклонных и вертикальных звеньев, причем наклонные отрезки параллельны.

Таким образом, в момент t_i величина запаса на складе $y(t)$ скачком увеличивается на Q_i. Следовательно, функция $y(t)$ имеет разрывы в точках t_1, t_2,… Для определенности будем считать, что эта функция непрерывна справа.

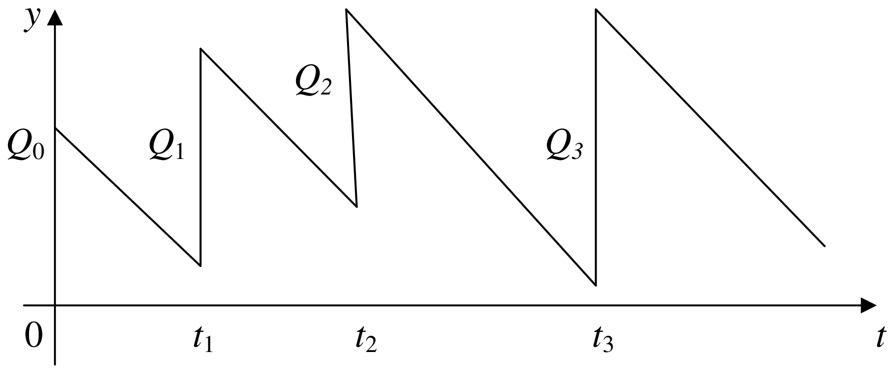


Рис. 5.3. График изменения величины запаса на складе

Пусть s – плата за хранение единицы товара в течение единицы времени. Поскольку можно считать, что величина запаса $y(t)$ не меняется в течение интервала времени $(t;\ t+dt)$, где dt – дифференциал, т.е. бесконечно малая, то плата за хранение всего запаса в течение этого интервала времени равна $sy(t)dt$. Следовательно, затраты за хранение в течение интервала времени $[0;T)$, где T – интервал планирования, пропорциональны (с коэффициентом пропорциональности s) площади под графиком уровня запаса на складе $y(t)$ и равны

$$s\int_0^T y(t)dt.$$

Пусть g – плата за доставку одной партии товара. Примем для простоты, что она не зависит от размера поставки. Позже покажем, что если эта плата равна $g+g_1Q$, где Q – размер поставки, то оптимальный план поставки – тот же, что и при отсутствии линейного члена. Будет проанализирована и более сложная модель, в которой предусмотрена скидка с ростом поставки, приводящая к выражению $g+g_1Q+\ g_2Q^2$ для платы за доставку одной партии товара размером Q.

Пусть $n(T)$ – количество поставок, пришедших в интервале $[0;T)$. При этом включаем поставку в момент $t = 0$ и не включаем поставку в момент $t = T$ (если такая поставка происходит). Тогда суммарные издержки на доставку товара равны $gn(T)$. Следовательно, общие издержки (затраты, расходы) за время T равны

$$F(T;y) = F(y(t),\ 0 \le t < T) = gn(T) + s\int_0^T y(t)dt.$$

Запись $F(T;y) = F(y(t),\ 0 \le t < T)$ означает, что общие издержки зависят от значений функции $y=y(t)$ при всех $0 \le t < T$. Символ y обозначает функцию как целое. Другими словами, область определения $F(T;y)$ при фиксированном T – не множество чисел, а множество функций.

Общие издержки, очевидно, возрастают при росте горизонта планирования T. Поэтому часто используют средние издержки, приходящиеся на единицу времени. Средние издержки за время T равны

$$f(T;y) = f(y(t),\ 0 \le t < T) = \frac{1}{T}F(T;y) = \frac{1}{T}\left\{gn(T) + s\int_0^T y(t)dt\right\}.$$

Поскольку товар отпускается со склада с постоянной интенсивностью (скоростью), дефицит не допускается, то доходы от работы склада пропорциональны горизонту планирования, средние доходы постоянны. Следовательно, максимизация прибыли эквивалентна минимизации издержек или средних издержек.

Если задать моменты прихода поставок и величины партий, то будет полностью определена функция $y=y(t)$ при всех $0 \le t < T$. Верно и обратное – фиксация функции $y= y(t)$, $0 \le t < T$, рассматриваемого вида (рис.5.3) полностью определяет моменты прихода поставок и величины партий. И то, и другое будем называть *планом* поставок или планом работы системы управления запасами. Для ее оптимизации необходимо выбрать моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2,… пополнения запаса на складе и размеры поставляемых партий товара Q_0, Q_1, Q_2,… так, чтобы минимизировать средние издержки $f_T(y)$ при фиксированном T. Модель производственной ситуации (т.е. работы склада) описывается четырьмя параметрами - μ (интенсивность спроса), s (стоимость хранения единицы продукции в течение единицы времени), g (стоимость доставки партии товара), T (горизонт планирования).

Решение задачи оптимизации. Поставленная задача оптимизации работы склада интересна тем, что неизвестно число $2n(T)$-1 параметров, определяющих план поставок. Поэтому ее решение не может быть проведено с помощью стандартных методов теории оптимизации.

Решим эту задачу в три этапа. На первом установим, что оптимальный план следует искать среди тех планов, у которых все зубцы доходят до оси абсцисс, т.е. запас равен 0 в момент доставки очередной партии. Цель второго этапа – доказать, что все зубцы должны быть одной и той же высоты. Наконец, на третьем находим оптимальный размер поставки.

Оптимальный план. Найдем наилучший план поставок. План, для которого запас равен 0 (т.е. $y(t) = 0$) в моменты доставок очередных партий, назовем *напряженным.*

Утверждение 1. Для любого плана поставок, не являющегося напряженным, можно указать напряженный план, для которого средние издержки меньше.

Покажем, как можно от произвольного плана перейти к напряженному плану, уменьшив при этом издержки. Пусть с течением времени при приближении к моменту t_1 прихода поставки Q_1 уровень запаса не стремится к 0, а лишь уменьшается до $y(t_1-) \neq 0$ (где знак «минус» означает предел слева функции $y(t)$ в точке t_1). Тогда рассмотрим новый план поставок с теми же моментами поставок и их величинами, за исключением величин поставок в моменты $t = 0$ и $t = t_1$. А именно, заменим Q_0 на $Q_{01} = Q_0 - y(t_1-)$, а Q_1 на $Q_{11} = Q_0 + y(t_1-)$. Тогда график уровня запаса на складе параллельно сдвинется вниз на интервале (0; t_1), достигнув 0 в t_1, и не изменится правее точки t_1. Следовательно, издержки по доставке партий не изменятся, а издержки по хранению уменьшатся на величину, пропорциональную (с коэффициентом пропорциональности s) площади параллелограмма, образованного прежним и новым положениями графика уровня запаса на интервале $(0; t_1)$ (см. рис.5.4).

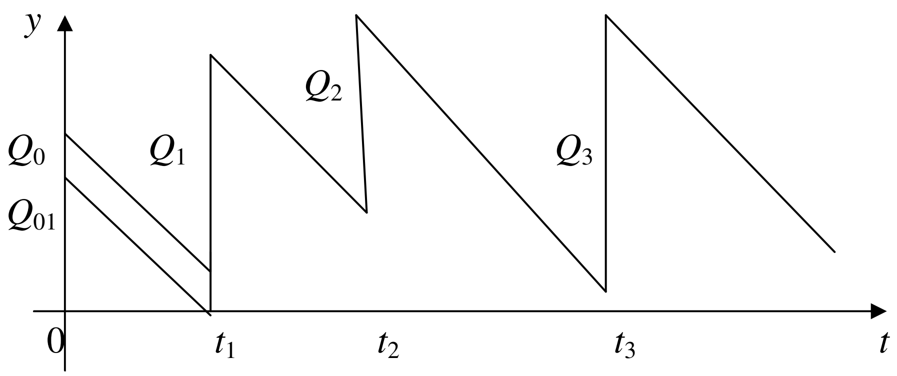


Рис. 5.4. Первый шаг перехода к напряженному плану

Итак, в результате первого шага перехода получен план, в котором крайний слева зубец достигает оси абсцисс. Следующий шаг проводится аналогично, только момент времени $t = 0$ заменяется на $t = t_1$. Если есть такая возможность, второе наклонное звено графика уровня запаса на складе параллельно сдвигается вниз, достигая в крайней правой точке t_2 оси абсцисс.

Аналогично поступаем со всеми остальными зубцами, двигаясь слева направо. В результате получаем напряженный план. На каждом шагу издержки по хранению либо сокращались, либо оставались прежними (если соответствующее звено графика не опускалось вниз). Следовательно, для полученного в результате описанного преобразования напряженного плана издержки по хранению меньше, чем для исходного плана, либо равны (если исходный план уже являлся напряженным).

Из утверждения 1 следует, что оптимальный план следует искать только среди напряженных планов. Другими словами, план, не являющийся напряженным, не может быть оптимальным.

Утверждение 2. Среди напряженных планов с фиксированным числом поставок минимальные издержки имеет тот, в котором все интервалы между поставками равны.

При фиксированном числе поставок затраты на доставку партий не меняются. Следовательно, достаточно минимизировать затраты на хранение.

Для напряженных планов размеры поставок однозначно определяются с помощью интервалов между поставками:

$$Q_{i-1} = \mu(t_i - t_{i-1}),\ i = 1,2,...,n(T)-1,\ Q_{n(T)-1} = \mu(T - t_{n(T)-1}).$$

Действительно, очередная поставка величиной Q_{i-1} совпадает с размером запаса на складе в момент t_{i-1}, расходуется с интенсивностью μ единиц товара в одну единицу времени и полностью исчерпывается к моменту t_i прихода следующей поставки.

Для напряженного плана издержки по хранению равны

$$s\int_0^T y(t)dt = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{Q_{i-1}(t_i - t_{i-1})}{2} = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{\mu(t_i - t_{i-1})^2}{2} = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{\mu\Delta_i^2}{2} = \frac{\mu s}{2}\sum_{i=1}^{n(T)} \Delta_i^2,$$

где

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1},\ i = 1,2,...,n(T),\ t_{n(T)} = T.$$

Ясно, что $\Delta_i,\ i = 1,2,...,n(T)$, - произвольные неотрицательные числа, в сумме составляющие T. Следовательно, для минимизации издержек среди напряженных планов с фиксированным числом поставок достаточно решить задачу оптимизации

$$\begin{cases} \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + ... + \Delta_n^2 \to \min, \\ \Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_n = T, \\ \Delta_i \ge 0,\ i = 1,2,...,n, \end{cases}$$

где $n = n(T)$.

Полученная математическая задача оптимизации уже решена в разделе 5.3. Решением являются

$$\Delta_i = \frac{T}{n}, \ i = 1,2,...,n.$$

При этих значениях Δ_i выполнены все ограничения оптимизационной задачи. Итак, утверждение 2 доказано.

Для плана с равными интервалами между поставками все партии товара имеют одинаковый объем. Для такого плана издержки по хранению равны

$$s\int_0^T y(t)dt = \frac{\mu s}{2}\sum_{i=1}^{n(T)}\Delta_i^2 = \frac{\mu s T^2}{2n(T)}.$$

Средние издержки (на единицу времени) таковы:

$$f(T;y) = \frac{1}{T}\left\{gn(T) + \frac{\mu s T^2}{2n(T)}\right\} = g\frac{n(T)}{T} + \mu s\frac{T}{2n(T)}.$$

Итак, минимизация средних издержек – это задача дискретной оптимизации. На третьем этапе построения оптимального плана необходимо найти натуральное число $n(T)$ – самое выгодное число поставок.

Поскольку к моменту T запас товара должен быть израсходован, то общий объем поставок за время T должен совпадать с общим объемом спроса, следовательно, равняться μT. Справедливо балансовое соотношение

$$Qn(T) = \mu T.$$

Из балансового соотношения следует, что

$$\frac{n(T)}{T} = \frac{\mu}{Q}.$$

Средние издержки (на единицу времени) можно выразить как функцию размера партии Q:

$$f(T;y) = g\frac{n(T)}{T} + \mu s\frac{T}{2n(T)} = f_1(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2}. \quad (5.6)$$

Задача состоит в минимизации $f_1(Q)$ по Q. При этом возможная величина поставки принимает дискретные значения, $Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\}$.

Изучим функцию $f_1(Q)$, определенную при $Q>0$. При приближении к 0 она ведет себя как гипербола, при росте аргумента – как линейная функция. Производная имеет вид

$$\frac{df_1(Q)}{dQ} = -\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{s}{2}.$$

Производная монотонно возрастает, поэтому рассматриваемая функция имеет единственный минимум в точке, в которой производная равна 0, т.е. при

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}.$$

Получена знаменитая «формула квадратного корня».

Учет дискретности множества, по которому проводится оптимизация. В литературе иногда без всяких комментариев рекомендуют использовать напряженный план, в котором размеры всех поставляемых партий равны Q_0. К сожалению, получаемый таким путем план почти всегда не является оптимальным, т.е. популярная рекомендация неверна или не вполне корректна. Дело в том, что почти всегда

$$Q_0 \notin \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\}.$$

Всегда можно указать неотрицательное целое число n такое, что

$$Q_1 = \frac{\mu T}{n+1} < Q_0 \le \frac{\mu T}{n} = Q_2. \qquad (5.7)$$

Утверждение 3. Решением задачи оптимизации

$$f_1(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2} \to \min,$$

$$Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\}$$

является либо Q_1, либо Q_2.

Действительно, из всех

$$Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\}$$

часть лежит правее Q_0, из них наименьшим является Q_2, а часть лежит левее Q_0, из них наибольшим является Q_1. Для построения оптимального плана обратим внимание на то, что производная функции $f_1(Q)$ отрицательна левее Q_0 и положительна правее Q_0, следовательно, функция средних издержек $f_1(Q)$ убывает левее Q_0 и возрастает правее Q_0. Значит, минимум по

$$Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\} \bigcap \{Q : Q \geq Q_0\}$$

достигается при $Q = Q_2$, а минимум по

$$Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\} \bigcap \{Q : Q < Q_0\}$$

- при $Q = Q_1$ Последнее утверждение эквивалентно заключению утверждения 3.

Итак, алгоритм построения оптимального плана таков.

1. Найти Q_0 по формуле квадратного корня.

2. Найти n из условия (5.7).

3. Рассчитать $f_1(Q)$ по формуле (5.6) для $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$, где Q_1 и Q_2 определены в (5.7).

4. Наименьшее из двух чисел $f_1(Q_1)$ и $f_1(Q_2)$ является искомым минимумом, а то из чисел Q_1 и Q_2, на котором достигается минимум – решением задачи оптимизации. Обозначим его Q_{opt} .

Оптимальный план поставки – это напряженный план, в котором объемы всех поставок равны Q_{opt}.

Замечание. Если $f_1(Q_1) = f_1(Q_2)$, то решение задачи оптимизации состоит из двух точек Q_1 и Q_2. В этом случае существует два оптимальных плана.

Пример 1. На складе хранится некоторая продукция, пользующаяся равномерным спросом. За 1 день со склада извлекается 5 т продукции. Плата за хранение 1 т. продукции в день – 50 руб. Плата на доставку одной партии – 980 руб. Горизонт планирования – 10 дней. Найти оптимальный план поставок.

В рассматриваемом случае μ=5 (т/день), s=50 (руб./т·день), g=980 (руб./партия), T = 10 (дней). По формуле квадратного корня рассчитываем

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}} = \sqrt{\frac{2\times 5\times 980}{50}} = \sqrt{196} = 14.$$

Множество допустимых значений для Q имеет вид

$$\left\{\frac{\mu T}{n},\ n = 1,2,...\right\} = \left\{50;\ \frac{50}{2};\ \frac{50}{3};\ \frac{50}{4};...\right\} = \{50;\ 25;\ 16,67;\ 12,5;...\}.$$

Следовательно, Q_1 = 12,5 и Q_2 = 16,67. Первое значение определяет напряженный план с четырьмя одинаковыми зубцами, а второе – с тремя. Поскольку

$$f_1(Q) = \frac{5\times 980}{Q} + \frac{50Q}{2} = \frac{4900}{Q} + 25Q,$$

то

$$f_1(Q_1) = f_1(12,5) = \frac{4900}{12,5} + 25\times 12,5 = 392 + 312,5 = 704,5$$

и

$$f_1(Q_2) = f_1(50/3) = \frac{4900\times 3}{50} + 25\times\frac{50}{3} = 294 + 416,67 = 710,67.$$

Поскольку $f_1(Q_1) < f_1(Q_2)$, то $Q_{opt} = Q_1$ = 12,5. Итак, оптимальным является напряженный план с четырьмя зубцами.

Как уже отмечалось, часто рекомендуют применять план поставок с Q=Q_0. Каков при этом проигрыш по сравнению с оптимальным планом?

Для плана с Q=Q_0 интервал между поставками составляет $Q_0/\mu = 14/5 = 2,8$ дня. Следовательно, партии придут в моменты t_0 = 0; t_1= 2,8; t_2 = 5,6; t_3 = 8,4. Следующая партия должна была бы придти уже за пределами горизонта планирования T =10, в момент t_4 = 11,2. Таким образом, график уровня запаса на складе в пределах горизонта планирования состоит из трех полных зубцов и одного не полного. К моменту T =10 пройдет 10 – 8,4 = 1,6 дня с момента последней поставки, значит, со склада будет извлечено $5\times1{,}6=8$ т продукции и останется 14 – 8 = 6 т. План с Q=Q_0 не является напряженным, а потому не является оптимальным для горизонта планирования T =10.

Подсчитаем общие издержки в плане с Q=Q_0. Площадь под графиком уровня запаса на складе равна сумме площадей трех треугольников и трапеции. Площадь треугольника равна $\frac{14\times2{,}8}{2}=19{,}6,$ трех треугольников – 58,8. Основания трапеции параллельны оси ординат и равны значениям уровня запаса в моменты времени t_3 = 8,4 и T =10, т.е. величинам 14 и 6 соответственно. Высота трапеции лежит на оси абсцисс и равна 10 – 8,4 = 1,6, а потому площадь трапеции есть $\frac{(14+6)\times1{,}6}{2}=16.$ Следовательно, площадь под графиком равна 58,8 + 16 = 74,8, а плата за хранение составляет $50\times74{,}8=3740$ руб.

За 10 дней доставлены 4 партии товара (в моменты t_0 = 0; t_1= 2,8; t_2 = 5,6; t_3 = 8,4), следовательно, затраты на доставку равны $4\times980=3920$ руб. Общие издержки за 10 дней составляют 3740+3920 = 7660 руб., а средние издержки – 766 руб. Они больше средних издержек в оптимальном плане в 766/704,5 = 1,087 раза, т.е. на 8,7%.

Отметим, что

$$f_1(Q_0)=\frac{4900}{Q_0}+25Q_0=\frac{4900}{14}+25\times14=350+350=700,$$

т.е. меньше, чем в оптимальном плане. Таким образом, из-за дискретности множества допустимых значений средние издержки возросли на 4,5 руб., т.е. на 0,64%. При этом оптимальный размер партии (12,5 т) отличается от Q_0 = 14 т на 1,5 т, т.е. $Q_{opt}/\ Q_0$ = 0,89 – различие на 11%. Достаточно большое различие объемов поставок привело к пренебрежимо малому изменению функции $f_1(Q)$. Это объясняется тем, что в точке Q_0 функция $f_1(Q)$ достигает минимума, а потому ее производная в этой точке равна 0.

Оба слагаемых в $f_1(Q_0)$ равны между собой. Случайно ли это? Покажем, что нет. Действительно,

$$\frac{\mu g}{Q_0} = \frac{\mu g}{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}} = \sqrt{\frac{\mu g s}{2}}; \quad \frac{sQ_0}{2} = \frac{s\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}}{2} = \sqrt{\frac{\mu g s}{2}}.$$

Таким образом, составляющие средних издержек, порожденные различными причинами, уравниваются между собой.

Средние издержки в плане с $Q=Q_0$ равны $\sqrt{2\mu g s}$. Интервал между поставками при этом равен

$$\frac{Q_0}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}}{\mu} = \sqrt{\frac{2g}{\mu s}}.$$

Издержки в течение одного интервала между поставками таковы:

$$\sqrt{2\mu g s} \times \sqrt{\frac{2g}{\mu s}} = 2g,$$

при этом половина (т.е. g) приходится на оплату доставки партии, а половина – на хранение товара.

Асимптотически оптимальный план. Из проведенных рассуждений ясно, что напряженный план с $Q=Q_0$ является оптимальным тогда и только тогда, когда горизонт планирования Т приходится на начало очередного зубца, т.е. для

$$T = n\frac{Q_0}{\mu} = n\sqrt{\frac{2g}{\mu s}}, \quad n = 1,2,... \qquad (5.8)$$

Для всех остальных возможных горизонтов планирования T этот план не является оптимальным. Оптимальным будет напряженный план с другим размером поставки. Важно, что при изменении горизонта планирования T от 0 до T_0 оптимальный план меняется на всем интервале [0; T_0].

Как происходит это изменение? При малых горизонтах планирования T делается лишь одна поставка (в момент времени $t = 0$), график уровня запаса на складе состоит из одного зубца. При увеличении T размер зубца плавно увеличивается. В некоторый момент $T(1)$ происходит переход от одного зубца к двум. В этот момент оптимальны сразу два плана поставки – с одним зубцом и с двумя. При переходе к планам с двумя зубцами размер зубца скачком уменьшается. При дальнейшем увеличении горизонта планирования оптимальный план описывается графиком с двумя одинаковыми зубцами, размер которых плавно растет. Далее в момент $T(2)$ становится оптимальным план с тремя зубцами, размер которых в этот момент скачком уменьшается (в компенсацию за увеличение числа скачков). И т.д.

Проблема состоит в том, что в реальной экономической ситуации выбор горизонта планирования T весьма субъективен. Возникает вопрос, какой план разумно использовать, если горизонт планирования не известен заранее (см. о проблеме горизонта планирования раздел 2.4 выше).

Ответ можно указать, если горизонт планирования является достаточно большим. Оказывается можно использовать план, в котором все размеры поставок равны Q_0. Для него уровень запаса на складе описывается функцией $y_0(t)$, $0 \le t < +\infty$, состоящей из зубцов высоты Q_0. Предлагается пользоваться планом, являющимся сужением этого плана на интервал $[0; T)$. Другими словами, предлагается на интервале $[0; T)$ использовать начальный отрезок этого плана. Он состоит из некоторого количества треугольных зубцов, а последний участок графика, описываемый трапецией, соответствует тому, что последняя поставка для почти всех горизонтов планирования не будет израсходована до конца. Этот план иногда называют планом Вильсона [170].

Ясно, что этот план не будет оптимальным (для всех T, кроме заданных формулой (5.8)). Действительно, план Вильсона можно улучшить, уменьшив объем последней поставки. Однако у него есть то полезное качество, что при изменении горизонта планирования его начальный отрезок не меняется. Действительно, планы поставок для горизонтов планирования T_1 и T_2 планы, определенные с помощью функции $y_0(t)$, $0 \le t < +\infty$, задающей уровень запасов на складе, совпадают на интервале $[0; \min\{T_1, T_2\})$.

Определение. Асимптотически оптимальным планом называется план поставок – функция $y:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$ такая, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{f(T; y_{opt}(T))}{f(T; y)} = 1,$$

где $y_{opt}(T)$ – оптимальный план на интервале $[0; T)$.

Здесь $f(T; y_{opt}(T))$ - средние издержки за время T для плана $y_{opt}(T)$, определенного на интервале $[0; T)$, а $f(T;y)$ - средние издержки за время T для плана $y:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$.

Теорема. План $y = y_0$ является асимптотически оптимальным.

Таким образом, для достаточно больших горизонтов планирования T планы $y_0(t)$, $0 \le t \le T$, все зубцы у которых имеют высоту Q_0, имеют издержки, приближающиеся к минимальным. Следовательно, эти планы Вильсона, являющиеся сужениями одной и той же функции $y:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$ на интервалы $[0; T)$ при различных T, можно использовать одновременно при всех достаточно больших T.

Доказательство. По определению оптимального плана

$$\frac{f(T; y_{opt}(T))}{f(T; y)} \le 1. \qquad (5.9)$$

Найдем нижнюю границу для рассматриваемого отношения. При фиксированном T можно указать неотрицательное целое число n такое, что

$$\frac{nQ_0}{\mu} \le T < \frac{(n+1)Q_0}{\mu}.$$

Так как $Tf(T; y_{opt}(T))$ и $\frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu}; y_{opt}(T)\right)$ - общие издержки на интервалах (0; T) и (0; nQ_0/μ) соответственно при использовании оптимального на (0; T) плана, то, очевидно, поскольку второй интервала – часть первого (или совпадает с ним), первые издержки больше вторых, т.е.

$$Tf(T; y_{opt}(T)) \geq \frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu}; y_{opt}(T)\right).$$

Далее, т.к. на интервале (0; nQ_0/μ), включающем целое число периодов плана y_0, оптимальным является начальный отрезок этого плана $y_0(nQ_0/\mu)$, то

$$\frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu}; y_{opt}(T)\right) \geq \frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu}; y_0(T)\right).$$

В правой части последнего неравенства стоит $\frac{nQ_0}{\mu}\sqrt{2\mu gs}$ (здесь использована формула для минимального значения средних издержек $f(T; y)$ при T, кратном nQ_0/μ). Из проведенных рассуждений вытекает, что

$$Tf(T; y_{opt}(T)) \geq \frac{nQ_0}{\mu}\sqrt{2\mu gs}. \quad (5.10)$$

Для общих издержек на интервалах (0; T) и (0; $(n + 1)Q_0/\mu$) при использовании плана y_0, очевидно, справедливо следующее неравенство

$$Tf(T; y_0(T)) \leq \frac{(n+1)Q_0}{\mu} f\left(\frac{(n+1)Q_0}{\mu}; y_0(T)\right).$$

Следовательно,

$$Tf(T; y_0(T)) \leq \frac{(n+1)Q_0}{\mu}\sqrt{2\mu gs}. \quad (5.11)$$

Из неравенств (5.10) и (5.11) вытекает, что

$$\frac{f(T; y_{opt}(T))}{f(T; y_0)} \geq \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{Q_0}{\mu T}.$$

Так как $\frac{Q_0}{\mu T} \to 0$ при $T \to \infty$, то, учитывая неравенство (5.9), из последнего неравенства выводим справедливость заключения теоремы. Таким образом, асимптотическая оптимальность плана y_0 доказана.

При небольшом T средние издержки в плане Вильсона могут существенно превышать средние издержки в оптимальном плане. Превышение вызвано скачками функции $f(T;\ y_0(T))$, связанными с переходами через моменты прихода очередных поставок (и увеличением общих издержек скачком на величину платы за доставку партии). Пусть горизонт планирования $T = t_k + \varepsilon$, где t_k – момент прихода (k+1)-й поставки в плане Вильсона, $\varepsilon > 0$. Тогда, как можно доказать,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(T; y_0(T))}{f(T; y_{opt}(T))} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_k + \varepsilon; y_0(t_k + \varepsilon)}{f(t_k + \varepsilon; y_{opt}(t_k + \varepsilon)} = 1 + \frac{1}{2k}.$$

Таким образом, затраты в плане Вильсона являются минимальными (относительно оптимального плана) при $T = t_k$, $k = 1, 2, \dots$, где t_k – моменты прихода поставок. Напомним, что план Вильсона является оптимальным при указанных T. Однако при T, бесконечно близком к t_k, но превосходящем t_k, затраты увеличиваются по сравнению с затратами в оптимальном плане в $\{1+1/(2k)\}$ раз. При дальнейшем возрастании T отношение издержек (средних или общих) в плане Вильсона к аналогичным издержкам в оптимальном плане постепенно уменьшается, приближаясь к 1 при приближении (снизу) к моменту t_{k+1} прихода следующей поставки. А там – новый скачок, но уже на меньшую величину $\{1+1/(2k+2)\}$. И т.д.

Сразу после прихода первой поставки отношение затрат составляет 1,5 (превышение на 50%), после прихода второй – 1,25 (превышение на 25%), третьей – 1,167 (превышение на 16,7%), четвертой – 1,125 (превышение на 12,5%), пятой – 1,1 (превышение на 10%), и т.д. Таким образом, при небольших горизонтах планирования T превышение затрат может быть значительным, план Вильсона отнюдь не оптимальный. Но чем больше горизонт планирования, тем отклонение меньше. Уже после сотой поставки оно не превышает 0,5%.

Влияние отклонений от оптимального объема партии. В реальных производственных и управленческих ситуациях часто приходится принимать решения об использовании объемов партии, отличных от оптимальной величины Q_0, рассчитанной по формуле квадратного корня. Например, при ограниченной емкости склада или для обеспечения полной загрузки транспортных средств большой вместимости. Это возможно также в ситуации, когда величина партии измеряется в целых числах (штучный товар) или даже в десятках, дюжинах, упаковках, ящиках, контейнерах и т.д., а величина Q_0 не удовлетворяет этому требованию и, следовательно, не может быть непосредственно использована в качестве объема поставки.

Поэтому необходимо уметь вычислять возрастание средних издержек при использовании напряженного плана с одинаковыми поставками объема Q, отличного от Q_0, по сравнению со средними издержками в оптимальном плане. Будем сравнивать средние издержки за целое число периодов. Как показано выше, они имеют вид

$$f_1(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2},$$

где Q- объем партии. Тогда

$$\frac{f_1(Q) - f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q - Q_0}{Q}\right)\left(\frac{Q - Q_0}{Q_0}\right). \qquad (5.12)$$

Это тождество нетрудно непосредственно проверить.

Пример 2. Пусть используется план с $Q = 0,9\ Q_0$. Тогда

$$\frac{f_1(Q) - f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-0,1Q_0}{0,9Q_0}\right)\left(\frac{-0,1Q_0}{Q_0}\right) = \frac{0,01}{1,8} = 0,0056.$$

.

Таким образом, изменение объема партии на 10% привело к увеличению средних издержек лишь на 0,56%.

Пример 3. Пусть используемое значение объема поставки Q отличается от оптимального не более чем на 30%. На сколько могут возрасти издержки?

Из формулы (5.12) вытекает, что максимальное возрастание издержек будет в случае $Q = 0{,}7\ Q_0$. Тогда

$$\frac{f_1(Q)-f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}3Q_0}{0{,}7Q_0}\right)\left(\frac{-0{,}3Q_0}{Q_0}\right)=\frac{0{,}09}{1{,}4}=0{,}0643.$$

.

Таким образом, издержки могут возрасти самое большее на 6,43%.

Сравнительно большое отклонение значения переменной Q от оптимального (на 10%) приводит к пренебрежимо малому возрастанию значения оптимизируемой функции. Этот факт имеет большое прикладное значение. Из него следует, что область «почти оптимальных» значений параметра весьма обширна, следовательно, из нее можно выбирать для практического использования те или иные значения, исходя из иных принципов. Можно, например, минимизировать какую-либо иную целевую функцию, тем самым решая задачу многокритериальной оптимизации. Можно «вписаться» в действующую дискретную систему возможных значений параметров. И т.д.

Замечание 1. Обширность области «почти оптимальных» значений параметра – общее свойство оптимальных решений, получаемых путем минимизации гладких функций. Действительно, пусть необходимо минимизировать некоторую функцию $g(x)$, трижды дифференцируемую. Пусть минимум достигается в точке x_0. Справедливо разложение Тейлора-Маклорена

$$g(x)=g(x_0)+\frac{dg(x_0)}{dx}(x-x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2g(x_0)}{dx^2}(x-x_0)^2+O((x-x_0)^3).$$

Однако в x_0 выполнено необходимое условие экстремума (в данном случае – минимума)

$$\frac{dg(x_0)}{dx}=0.$$

Следовательно, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка (по сравнению с $(x\text{-}x_0)^2$) справедливо равенство

$$g(x) - g(x_0) = \frac{1}{2}\frac{d^2 g(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2. \qquad (5.13)$$

Это соотношение показывает, что приращение значений минимизируемой функции – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с приращением независимой переменной. Если $x = x_0 + \varepsilon$, то $g(x) - g(x_0) = C\varepsilon^2$, где

$$C = \frac{1}{2}\frac{d^2 g(x_0)}{dx^2}^2 .$$

Вернемся к классической модели управления запасами. Для нее надо рассматривать $f_1(Q)$ в роли $g(x)$. С помощью (5.13) заключаем, что

$$f_1(Q) - f_1(Q_0) = \frac{1}{2}\frac{d^2 f_1(Q_0)}{dQ^2}(Q - Q_0)^2$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. Вычислим вторую производную $f_1(Q)$. Поскольку

$$\frac{df_1(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left(\frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2}\right) = -\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{s}{2},$$

то

$$\frac{d^2 f_1(Q)}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}\left(-\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{s}{2}\right) = \frac{2\mu g}{Q^3}.$$

Теперь заметим, что

$$\frac{2\mu g}{Q_0} = \frac{2\mu g}{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}} = \sqrt{2\mu g s} = f_1(Q_0).$$

Следовательно,

$$f_1(Q) - f_1(Q_0) = \frac{1}{2}\frac{f_1(Q_0)}{Q_0^2}(Q - Q_0)^2$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. Отличие этой формулы от точной формулы (5.12) состоит только в том, что Q в знаменателе одной из дробей заменено на Q_0.

Устойчивость выводов в математической модели. Выше изучено изменение средних издержек при малых отклонениях величины поставки. Предположим теперь, что вместо истинных значений параметров μ, g, s нам известны лишь их приближенные значения μ* = μ + Δμ, $g^* = g + \Delta g$, $s^* = s + \Delta s$. Мы применяем план Вильсона, но с искаженным объемом партии

$$Q^* = Q^*(\mu^*, g^*, s^*) = \sqrt{\frac{2\mu^* g^*}{s^*}}.$$

Это приводит к возрастанию средних издержек. Согласно формулам (5.12) – (5.13) возрастание пропорционально $(\Delta Q)^2$ (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка). Здесь

$$\Delta Q = Q^*(\mu^*, g^*, s^*) - Q_0(\mu, g, s).$$

Выделим в ΔQ главный линейный член:

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial \mu}\Delta\mu + \frac{\partial Q}{\partial g}\Delta g + \frac{\partial Q}{\partial s}\Delta s = \sqrt{\frac{g}{2\mu s}}\Delta\mu + \sqrt{\frac{\mu}{2gs}}\Delta g - \sqrt{\frac{\mu g}{2s^3}}\Delta s \qquad (5.14)$$

(с точностью до бесконечно малых более высокого порядка).

Величину Δμ можно определить по фактическим данным о спросе, оценив величину отклонения реального спроса от линейного приближения [170], например, с помощью математического аппарата линейного регрессионного анализа [200]. Для определения значений параметров g и s необходимо проведение специальных трудоемких исследований. К тому же существуют различные методики расчета этих параметров, результаты расчетов по которым не совпадают. Поэтому естественно оценить разумную точность определения g и s по известной точности определения μ. Для этого воспользуемся принципом уравнивания погрешностей (глава 2).

Выберем Δg и Δs так, чтобы увеличение затрат, вызванное неточностью определения g и s, было таким же, как и вызванное неточностью определения μ. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка это означает, что необходимо уравнять между собой три слагаемых в правой части (5.14). После сокращения общего множителя получаем, что согласно принципу уравнивания погрешностей:

$$\frac{|\Delta\mu|}{\mu}=\frac{|\Delta g|}{g}=\frac{|\Delta s|}{s}. \qquad (5.15)$$

Таким образом, *относительные погрешности определения параметров модели должны совпадать*.

В (5.25) используются истинные значения параметров, которые неизвестны. Поэтому целесообразно вначале вместо параметров использовать их грубые оценки, из (5.15) определить их примерную точность, затем провести исследования, уточняющие их значения. Эту процедуру естественно повторять до тех пор, пока не произойдет некоторое уравнивание относительных погрешностей определения параметров модели.

Модель с дефицитом. Классическая модель управления запасами может быть обобщена в различных направлениях. Одно из наиболее естественных обобщений – введение в модель возможности дефицита.

В рассматриваемой до сих пор модели предполагалось, что дефицит не допускается, т.е. некоторое количество товара на складе всегда есть. Но, может быть, выгоднее сэкономить на расходах по хранению запаса, допустив небольшой дефицит – потребность в товаре в некоторые интервалы времени может остаться неудовлетворенной?

Как подсчитать убытки от дефицита, в частности, от потери доверия потребителя? Будем считать, что если нет товара, владеющая складом организация платит штраф – каждый день пропорционально нехватке. По приходе очередной поставки все накопленные требования сразу же удовлетворяются.

Сохраним все предположения и обозначения рассматриваемой до сих пор модели, кроме отсутствия дефицита. Неудовлетворенный спрос будем рассматривать как отрицательный запас. График изменения величины запаса на складе изображен на рис. 5.5.

Очевидно, рис. 5.3 и рис. 5.5 отличаются только тем, что на последнем рисунке зубцы графика могут опускаться ниже оси абсцисс, что соответствует сдвигу графика рис. 5.3 как единого целого вниз вдоль оси ординат.

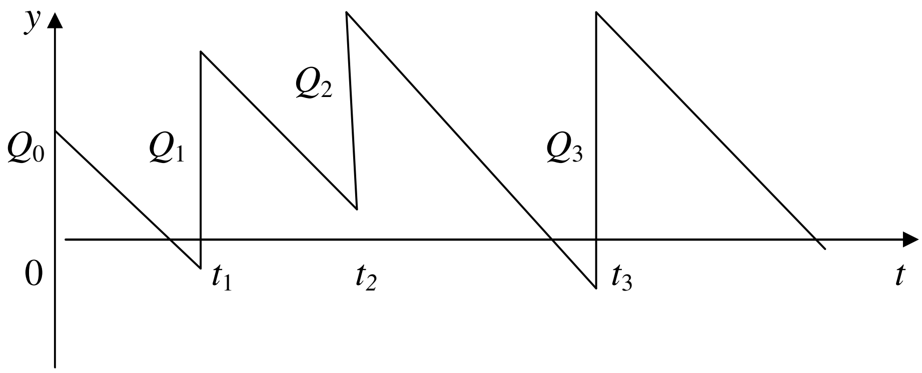


Рис. 5.5. График изменения величины запаса на складе
при возможности дефицита.

Пусть h – плата за нехватку единицы товара в единицу времени (например, в день). Тогда средние издержки за время T равны

$$f_1(T,y) = f_1(y(t),\ 0 \le t \le T) = \frac{1}{T}\left\{ s\int_0^T y(t)\chi(y(t) \ge 0)dt + h\int_0^T |\, y(t)\,|\,\chi(y(t) < 0)dt + gn(T) \right\},$$

где $\chi(A)$ – индикатор множества A, т.е. $\chi(y(t) \geq 0) = 1$ при $y(t) \geq 0$ и $\chi(y(t) \geq 0)=0$ при $y(t)<0$, в то время как $\chi(\mathrm{y}(t)<0) = 1$ при $y(t)<0$ и $\chi(y(t)<0) = 0$ при $y(t) \geq 0$. Таким образом, площадь под частью графика уровня запаса, лежащей выше оси абсцисс, берется с множителем s, а площадь между осью абсцисс и частью графика $y(t)$, соответствующей отрицательным значениям запаса, берется с заметно большим по величине множителем h.

Для модели с дефицитом оптимальный план находится почти по той же схеме, что и для модели без дефицита. Сначала фиксируем моменты поставок и находим при этом условии оптимальные размеры поставок. Речь идет о выборе уровня запаса Y в момент прихода очередной поставки (рис. 5.6).

Увеличивая или уменьшая Y, можно увеличивать или уменьшать площадь треугольника над осью абсцисс (учитываемую с коэффициентом

s) и соответственно уменьшать или увеличивать площадь треугольника под осью абсцисс (учитываемую с коэффициентом h), добиваясь минимизации взвешенной суммы этих площадей. Все элементы прямоугольных треугольников на рис. 5.6 выражаются через Y, заданный интервал времени между поставками и параметры модели.

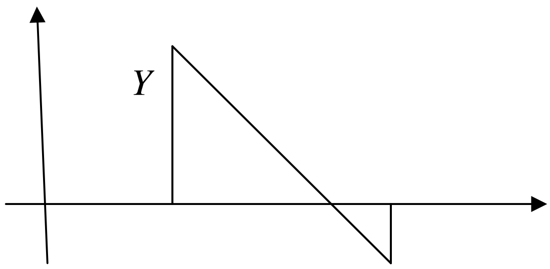


Рис. 5.6. Первый шаг построения оптимального плана в модели с дефицитом.

Минимизация соответствующего квадратного трехчлена дает оптимальное значение

$$Y = \frac{h}{s+h}\mu\Delta.$$

При этом минимальная сумма затрат на хранение и издержек, вызванных дефицитом, равна

$$\frac{\Delta^2\mu}{2}\frac{sh}{s+h}.$$

Второй шаг нахождения оптимального плана в модели с дефицитом полностью совпадает с аналогичным рассуждением в исходной модели. Фиксируется число поставок, и с помощью варьирования размеров интервалов между поставками минимизируется целевой функционал. Поскольку сумма квадратов некоторого числа переменных при заданной их сумме достигает минимума, когда все эти переменные равны между собой, то оптимальным планом является план, у которого все зубцы одинаковы, т.е. уровень запаса в момент прихода очередной поставки – всегда один и тот же. При этом все объемы поставок, за исключением объема начальной поставки (в нулевой момент времени), равны между собой:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = ..., Q_0 = \frac{h}{s+h}Q. \quad (5.16)$$

На третьем этапе среди указанного однопараметрического дискретного множества планов находим оптимальный план. Как и для модели без дефицита, в качестве ориентира используется план с размером поставки, определяемой по формуле квадратного корня,

$$Q_0(\mu, g, s, h) = \sqrt{\frac{2\mu g(s+h)}{sh}}.$$

Для горизонтов планирования T, кратных $Q_0(\mu, g, s, h)/\mu$, оптимальным является план типа (5.16) с $Q = Q_0(\mu, g, s, h)$. Для всех остальных горизонтов планирования, как и в случае модели без дефицита, необходимо найти неотрицательное целое число n такое, что

$$Q_1 = \frac{\mu T}{n+1} < Q_0(\mu, g, s, h) < \frac{\mu T}{n} = Q_2,$$

а затем, сравнив издержки для $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$, объявить оптимальным то из этих двух значений, для которого издержки меньше.

Отметим, что модель без дефицита является предельным случаем для модели с дефицитом при безграничном возрастании платы за дефицит. В частности,

$$\lim_{h \to \infty} Q_0(\mu, g, s, h) = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}.$$

Как и в случае модели без дефицита, план с объемом поставки, определяемой по формуле квадратного корня, $Q = Q_0(\mu, g, s, h)$, является асимптотически оптимальным.

Система моделей на основе модели Вильсона. Классическая модель теории управления запасами допускает различные обобщения. Одно из них – модель с конечной скоростью поставки υ, т.е. модель, в которой за время Δt поставляется продукция объемом $\upsilon\Delta t$ (при наличии в то же время постоянного спроса с интенсивностью μ, причем считается, что $\upsilon>\mu$). Таким образом, в этой модели поставка происходит не мгновенно, а в течение некоторого интервала времени, причем объем поставляемой продукции линейно зависит от времени. Такие поставки будем называть линейными с интенсивностью υ.

Другое обобщение классической модели связано с обобщением функции от объема запаса, задающей плату за хранение. В исходной модели считалось, что расходы за хранение пропорциональны объему продукции на складе. Естественно считать, что эти расходы должны содержать постоянный член a, не зависящий от объема продукции на складе (расходы на содержание самого склада, оплату работников и т.д.). Однако оптимальный план при таком обобщении не изменится: в формуле для издержек добавится постоянный член a, и положение минимума не изменится при этом.

Однако в модели с дефицитом ситуация иная. Затраты на хранение возникают только при наличии товара на складе, и издержки этого вида вполне естественно разделить на постоянные и переменные (пропорциональные объему запаса на складе). Аналогично издержки, вызванные дефицитом, естественно разделить на постоянные (вызванные самим фактом дефицита) и переменные (пропорциональные его величине).

В классической модели плата за доставку партии не зависит от объема партии, т.е. учитываются только постоянные издержки. Представляется естественным ввести линейный член, соответствующий возрастанию платы за доставку в зависимости от величины партии (переменные издержки). (Ниже будет показано, что добавление этого члена не влияет на решение задачи оптимизации и вид оптимального плана.) Дальнейшее обобщение – введение скидок в зависимости от величины партии. Тогда плата за доставку - квадратный трехчлен от объема партии.

Можно рассматривать одновременно несколько обобщений. В результате получаем систему моделей на основе классической модели управления запасами, состоящую из 36 моделей [234], описываемых набором четырех чисел ($a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, $a(4)$). Каждое из этих чисел соответствует одному из рассмотренных выше видов обобщений исходной модели.

При этом $a(1) = 0$, если поставки мгновенные, и $a(1) = 1$, если поставки являются линейными с интенсивностью υ, причем $\upsilon>\mu$.

Если плата за хранение продукции объемом y в течение единицы времени равна sy, то $a(2) = 0$. Если же учтены постоянные (при наличии товара на складе) издержки, т.е. указанная плата равна $sy+a$, $a>0$, то $a(2) =1$.

Если плата за нехватку продукции объемом y в течение единицы времени бесконечна (т.е. дефицит не допускается), то $a(3) = 0$. Если эта плата равна hy (рассмотренная выше модель с дефицитом), то $a(3)=1$. Если есть постоянные издержки (плата за само наличие дефицита), плата за нехватку продукции объемом y в течение единицы времени $hy + b$, $b > 0$, то $a(3) = 2$.

Наконец, $a(4) = 0$, если плата за доставку партии продукции объемом Q равна g. Если учитываются переменные издержки, т.е. эта плата равна $g + g_1Q$, то $a(4) = 1$. Если учитываются скидки на объем партии, т.е. если плата за доставку партии продукции объемом Q равна $g + g_1Q + g_2Q^2$, то $a(4) = 2$.

Для $a(1)$ имеется два возможных значения, для $a(2)$ – тоже два, для $a(3)$ – три возможных значения, для $a(4)$ – тоже три. Всего имеется $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ возможных комбинаций, т.е. 36 возможных моделей. Классическая модель управления запасами описывается набором (0, 0, 0, 0), а модель с дефицитом – набором (0, 0, 1, 0).

Рассмотрим самую общую модель рассматриваемой системы. Она описывается набором (1, 1, 2, 2). Можно показать, что для нее справедливы основные утверждения, касающиеся классической модели и модели с дефицитом. Однако «формула квадратного корня» имеет более сложный вид:

$$Q_0(\mu, \nu, s, a, h, b, g, g_1, g_2) = \sqrt{\frac{\mu g - \dfrac{(a-b)^2}{2(s+h)}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{\mu}{\nu}}\right)}{\dfrac{sh}{2(s+h)}\left(1-\dfrac{\mu}{\nu}\right)+\mu g_2}}.$$

В частности, план с Q = $Q_0(\mu, \nu, s, a, h.b.g.g_1, g_2)$ является асимптотически оптимальным.

Формула для $Q_0(\mu, \nu, s, a, h, b, g, g_1, g_2)$ позволяет обнаружить ряд любопытных эффектов. Так, в ней не участвует параметр g_1. Другими словами, при любом изменении этого параметра оптимальный объем поставки не меняется. Если запас пополняется весьма быстро по сравнению со спросом, т.е. $\upsilon >> \mu$, то соответствующий множитель в «формуле квадратного корня» исчезает, и для моделей с $a(1) = 0$ получаем более простую формулу

$$Q_0(\mu, +\infty, s, a, h, b, g, g_1, g_2) = \sqrt{\frac{\mu g - \dfrac{(a-b)^2}{2(s+h)}}{\dfrac{sh}{2(s+h)}+\mu g_2}}.$$

Дальнейшее упрощение получаем при $a = b$. Это равенство означает, что постоянные (в другой терминологии – фиксированные) платежи за хранение и в связи с дефицитом совпадают, например, равны 0. Если последнее утверждение справедливо, то

$$Q_0(\mu, +\infty, s, 0, h, 0, g, g_1, g_2) = \sqrt{\frac{\mu g}{\dfrac{sh}{2(s+h)}+\mu g_2}}.$$

Предположим теперь, что при доставке партии отсутствуют скидки (или надбавки) за размер партии. Тогда «формула квадратного корня» упрощается дальше и приобретает вид

$$Q_0(\mu,+\infty,s,0,h,0,g,g_1,0)=\sqrt{\frac{\frac{\mu g}{sh}}{\frac{2(s+h)}{}}}.=\sqrt{\frac{2\mu g(s+h)}{sh}}.$$

Эта формула была получена выше при рассмотрении модели с дефицитом. При безграничном возрастании h получаем формулу Вильсона для классической модели управления запасами:

$$Q_0(\mu,+\infty,s,0,+\infty,0,g,g_1,0)=\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}.$$

Новое в последних двух формулах – наличие в левой части параметра g_1, не участвующего в формировании объема партии.

Замечание 2. Модели конкретных экономических (и не только) процессов и явлений, как правило, не встречаются и не изучаются поодиночке. Обычно имеется совокупность моделей, объединенных в систему, переходящих друг в друга при тех или иных предельных переходах. Часто более простые модели используются для расчетов, более сложные применяются для изучения точности, достигаемой с помощью более простых, согласно подходу на основе «общей схемы устойчивости».

О практическом применении классической модели управления запасами. Для отработки методики практического использования классической модели управления запасами был проведен эксперимент на снабженческо-сбытовой базе, а именно, на Реутовской химбазе Московской области. Собраны и обработаны данные по одному из товаров, распространяемых этой организацией в большом объеме, - по кальцинированной соде. В качестве исходной информации о спросе использовались данные об ежедневном отпуске кальцинированной соды потребителям, зафиксированные на карточках складского учета. Рассчитана величина затрат на хранение как соответствующая доля общей суммы издержек по содержанию базы, а также расходы на доставку новых партий. Для определения расходов на хранение запасов использованы данные о заработной плате складского персонала (включая основную и дополнительную заработная плата, начисления на зарплату), расходах на содержание охраны, эксплуатацию складских зданий и сооружений, расходах по текущему ремонту, по таре, на приемку, хранение, упаковку и реализацию товаров, о величине амортизационных отчислений и др. Для расчета расходов на доставку новых партий товара использованы данные о расходах по завозу, о плате за пользование вагонами и контейнерами сверх установленных норм, расходах на содержание и эксплуатацию подъемно-транспортных механизмов, о заработной плате работников, занятых в процессе доставки товара, канцелярских, расходах на связь и др.

Полезным оказалось вытекающее из «принципа уравнивания погрешностей» соотношение (5.15). Интенсивность спроса μ и погрешность определения этого параметра найдены методом наименьших квадратов. Это дало возможность установить величину относительной точности определения параметров модели, вытекающих из величин погрешностей исходных данных для спроса. Параметры классической модели управления запасами g и s оценивались двумя способами – по методике Всесоюзного института материально-технического снабжения и по методике Центрального экономико-математического института АН СССР. Для каждой из методик с помощью соотношения (5.15) были определены абсолютные погрешности определения параметров g и s. Оказалось, что для каждой из методик интервалы $(s - \Delta s,\ s + \Delta s)$ и $(g - \Delta g,\ g + \Delta g)$ таковы, что числа, рассчитанные по альтернативной методике, попадают внутрь этих интервалов. Это означает, что для определения параметров g и s можно пользоваться любой из указанных методик (в пределах точности расчетов, заданной наблюдаемыми колебаниями спроса).

Вызванное отклонениями параметров модели в допустимых пределах максимальное относительное увеличение суммарных затрат на доставку и хранение продукции не превосходило 26% (колебания по кварталам от 22,5% до 25,95%). Фактические издержки почти в 3 раза превышали оптимальные (в зависимости от квартала фактические издержки составляли от 260% до 349% от оптимального уровня). Следовательно, внедрение модели Вильсона в практику управления запасами на Реутовской химбазе дает возможность снизить издержки, связанные с доставкой и хранением кальцинированной соды не менее чем в 2,1 раза [69].

Таким образом, несмотря на то, что параметры модели определены неточно и отклонения значений параметров (от тех значений, по которым рассчитывается оптимальный план поставок) приводят к некоторому увеличению затрат по сравнению с затратами в оптимальном плане, использование рассматриваемой модели для реального управления запасами конкретной продукции может дать значительный экономический эффект. Аналогичным является положение со многими другими моделями управления запасами. Это утверждение подтверждает и зарубежный опыт, проанализированный в [170].

Двухуровневая модель управления запасами. Создание автоматизированной системы управления материально-техническим снабжением (в другой терминологии – процессами логистики), базирующейся на комплексе экономико-математических моделей, должно включать в себя разработку (в качестве блоков) моделей деятельности отдельных баз (складов). Поэтому большое внимание уделяется проблеме построения оптимальной политики управления запасами на базе (складе).

Двухуровневая модель управления запасами – это однопродуктовая модель работы склада, в которой заявки потребителей удовлетворяются мгновенно. При отсутствии продукта заявки учитываются. Как только запас на складе опускается до уровня $R < 0$, мгновенно поступает партия товара величиной Q и запас на складе оказывается равным $R+Q>0$. Как и в рассмотренном выше варианте классической модели Вильсона с дефицитом, издержки складываются из издержек по хранению, издержек от дефицита и издержек по доставке. Средние издержки за время T имеют вид

$$f_1(T,y) = f_1(y(t),\ 0 \le t \le T) = \frac{1}{T}\left\{ s\int_0^T y(t)\chi(y(t) \ge 0)dt + h\int_0^T |\,y(t)\,|\,\chi(y(t) < 0)dt + gn(T) \right\},$$

где $y(t)$ – уровень запаса на складе, $\chi(A)$ – индикатор множества A, т.е. $\chi(y(t)\geq 0) = 1$ при $y(t)\geq 0$ и $\chi(y(t)\geq 0)=0$ при $y(t)<0$, в то время как $\chi(y(t)<0) = 1$ при $y(t)<0$ и $\chi(y(t)<0) = 0$ при $y(t)\geq 0$, параметры модели s, h, g имеют тот же смысл, что и выше. Оптимизация состоит в определении значений нижнего уровня R и верхнего уровня $R+Q$, минимизирующих средние издержки.

В 1950-х гг. К. Эрроу с сотрудниками показали, что в естественной постановке оптимальная политика управления запасами – это политика, основанная на двухуровневой модели [170]. Этот принципиально важный теоретический результат стимулировал развитие исследований свойств двухуровневой модели. Однако окончательная теория была построена только в конце 1970-х гг. [169, 170].

Важными являются характеристики потока заявок. Пусть $\tau(T)$ – число заявок за время T. Эта величина предполагается случайной. С прикладной точки зрения вполне естественно предположить, что математическое ожидание $M\tau(T)$ конечно. Накопленный спрос за время T имеет вид

$$X(T) = X_1 + X_2 + ... + X_{\tau(T)},$$

где X_j – величина j-ой заявки. Предполагается, что $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием MX_1. Таким образом, накопленный спрос за время T является суммой случайного числа случайных слагаемых. Накопленный спрос определяет уровень запаса на складе, поэтому математический аппарат изучения двухуровневой модели – это предельная теория сумм случайного числа случайных слагаемых.

При некоторых условиях регулярности (выполняющихся для реальных систем управления запасами) в [169, 170, 216] найдены оптимальные (для горизонта планирования T) значения нижнего и верхнего уровней:

$$R_0(T) = -\sqrt{\frac{2gsM\tau(T)MX_1}{Th(s+h)}},$$

$$Q_0(T) = \sqrt{\frac{2g(s+h)M\tau(T)MX_1}{Tsh}}.$$

Часто можно принять, что число поступающих заявок обладает некоторой равномерностью. Например, вполне естественно принять, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{M\tau(T)}{T} = \lambda$$

при некотором λ. Здесь λ – параметр, описывающий предельную интенсивность спроса. Тогда асимптотически оптимальные уровни имеют вид:

$$R_0 = -\sqrt{\frac{2gs\lambda MX_1}{h(s+h)}},$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2g(s+h)\lambda MX_1}{sh}}.$$

Отметим, что асимптотическое распределение уровня запаса на складе – равномерное на отрезке [R, R+Q].

***Модель планирования размеров поставок на базу* (*склад*).** В двухуровневой модели накопленный спрос в любой момент времени является случайной величиной. Это не всегда соответствует экономической реальности. Достаточно часто в соответствии с заключенными договорами размеры поставок на базу и объемы запрашиваемой потребителями продукции определены до начала года (с разбивкой по периодам - кварталам или месяцам) и затем не меняются. Однако поставщик имеет право отгружать продукцию, а потребители – забирать ее в течение всего периода.

Опишем соответствующую однопродуктовую модель [239]. Пусть интервал планирования разбит на m периодов, не обязательно одинаковых по продолжительности. В течение каждого периода приходит на базу одна поставка. В i-й период ее величина равна H_i, а момент поступления – случайная величина $\tau(i)$ с функцией распределения $G(i,t)$, $0\le t\le 1$, где t – отношение времени, прошедшего с начала i-го периода, к продолжительности его, $i = 1, 2, \dots, m$.

В i-й период имеется $n(i)$ потребителей, получающих с базы строго определенное количество продукта, $c(1,i)$, $c(2,i)$, …, $c(n(i),i)$ соответственно. Моменты поступления требований от потребителей – случайные величины $\delta(i,j)$, $j = 1, 2, \dots, n(i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, с функциями распределения $F(i,j,t)$, $0 \le t \le 1$, где t – отношение времени, прошедшего после начала соответствующего периода, к продолжительности этого периода. Если в момент прихода требования на базе имеется достаточное количество продукта, то он отпускается мгновенно. Если продукта нет, то потребителю придется ждать очередной поставки. Если продукта недостаточно, то весь оставшийся товар отпускается сразу, а оставшуюся часть приходится ждать.

В течение i-го периода, $i = 1, 2, \dots, m$, все моменты поступления товара и требований $\tau(i)$, $\delta(i,j)$, $j = 1, 2, \dots, n(i)$, предполагаются независимыми в совокупности. Потери, как обычно, складываются из издержек по хранению и от дефицита (расходы на доставку партий заданы заранее, т.е. постоянны, а потому их можно не включать в минимизируемый функционал). Издержки по хранению предполагаются пропорциональными времени хранения и величине запаса с коэффициентами пропорциональности $s(i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Издержки от дефицита складываются из потерь у каждого из потребителей; они пропорциональны величине и длительности дефицита с коэффициентами пропорциональности $h(i,j)$, $j = 1, 2, \dots, n(i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Пусть $x(0)$ – начальный запас, $x(i)$ – количество продукта на базе в конце i-го периода, $i = 1, 2, \dots, m$. Пусть $S(i) = \{s(i), c(j,i), \mathrm{h}(i,j), G(i,t), F(i,j,t), 0 \le t \le 1, j = 1, 2, \dots, n(i)\}$ – исходные данные модели в i-й период. Как легко видеть, математическое ожидание издержек за i-й период зависит только от $x(i\text{-}1)$, $x(i)$ и $S(i)$. Для краткости обозначим его через $f(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$. Тогда математическое ожидание издержек за m периодов равно

$Z(m) = f(x(0), x(1), S(1)) + f(x(1), x(2), S(2)) + \ldots$
$+ f(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) + \quad + f(x(m\text{-}1), x(m), S(m))$.
Необходимо минимизировать $Z(m) = Z(x(0), x(1), \ldots, x(i), \ldots, x(m))$ по совокупности переменных. Таким образом, необходимо найти оптимальные значения уровней запаса на складе в начале и в конце периодов. Это эквивалентно определению оптимальных размеров поставок по периодам и начального запаса. Ограничения рассматриваемой оптимизационной задачи выписаны в [170, 239].

Вначале была сделана попытка рассматривать задачу минимизации $Z(m)$ как задачу динамического программирования и решать ее типовыми методами. Однако вычислительных мощностей оказалось недостаточно для выполнения расчетов. Тогда нам удалось показать, что функция $(m+1)$-го переменного $Z(m)$ в действительности является суммой $(m + 1)$ функции одного переменного.

Действительно,
$f(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) = f_1(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) + f_2(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$,
где $f_1(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$ – математическое ожидание затрат, произведенных до прихода очередной поставки, $f_2(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$ – математическое ожидание затрат после поступления поставки.

Ясно, что $f_1(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$ определяется запасом на начало периода и спросом до прихода поставки, но не зависит от запаса на конец периода, т.е. от $x(i)$. Таким образом, можно записать, что
$f_1(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) \equiv f_1(x(i\text{-}1), S(i))$.

Пусть H_i – объем поставки на склад в i-й период. Сразу же после прихода поставки запас y на складе равен
$$y(\tau(i)) = x(i\text{-}1) + H_i - \xi(\tau(i)) = x(i) + \sum_{1\le j\le n(i)} c(j,i) - \xi(\tau(i)),$$
где $\xi(\tau(i))$ – накопленный с начала периода спрос. Поскольку $\xi(\tau(i))$ не зависит от $x(i\text{-}1)$, то и $f_2(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$ не зависит от $x(i\text{-}1)$. Итак,
$f_2(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) \equiv f_2(x(i), S(i))$.

Следовательно, минимизируемая функция имеет вид

$$Z(m) = f_1(x(0), S(1)) + \sum_{1 \le i \le m-1} \{f_2(x(i), S(i)) + f_1(x(i), S(i+1))\} + f_2(x(m), S(m)).$$

При этом ограничения наложены на каждую переменную $x(i)$ по отдельности [170, 239]. Ясно, что задача минимизации $Z(m)$ распадается на m+1 задачу минимизации функций одной переменной:

$f_1(x(0), S(1)) \to \min$,

$f_2(x(i), S(i)) + f_1(x(i), S(i+1)) \to \min$, (5.17)

$i = 1, 2, ..., m - 1$,

$f_2(x(m), S(m)) \to \min$

(ограничения не указаны). Следовательно, $x(k)$ зависит только от исходных данных смежных периодов $S(k)$ и $S(k+1)$ и остается неизменным при любом изменении $S(i)$, $i \ne k$, $i \ne k+1$. Из указанного разложения задачи многомерной оптимизации на ряд задач одномерной оптимизации вытекает также, что при планировании на $m(1)$ и $m(2)$ периодов совпадают оптимальные значения начального запаса и поставок за первые $\min\{m(1), m(2)\}$ -1 периодов. В частном случае стационарного режима $S(i)= S$, i= 1, 2, …, m, оптимальный план имеет вид $\{a, b, b, …, b, …, b, c\}$, где a – решение первой из указанных в (5.17) задач, b – решение второй задачи и c – третьей.

Переход к задачам (5.17) не только позволяет решить исходную задачу минимизации (напомним, что для минимизации задачи в исходной форме не хватало вычислительных мощностей), но также получить весьма важный для экономической интерпретации вывод о независимости оптимальных значений поставок и начального запаса от горизонта планирования m.

З*амечание 3.* Рассмотренная модель демонстрирует пользу математического анализа оптимизационной задачи принятия решений. Такой анализ позволяет решать задачу не стандартными методами, требующими больших вычислительных ресурсов, а с помощью специально разработанных алгоритмов, учитывающих специфику задачи и позволяющих на много порядков сократить вычисления. Плата за экономию вычислительных ресурсов – привлечение квалифицированного труда специалистов ЭМ-МиМ.

Итак, в настоящее время логистика – одна из экономических дисциплин, весьма развитая как в теоретическом, так и в практическом отношении. В ней рассматривается масса конкретных моделей управления запасами.

Из перспективных направлений назовем использование случайных множеств в моделях логистики [170, гл.5]. Имеются в виду множества наименований видов продукции. В нашей работе [170, гл.5ы] описан иерархические процессы агрегирования и распределения. На нижнем уровне путем нахождения эмпирического среднего агрегируются непосредственно требования потребителей, на каждом из последующих – требования, поступающие с нижних уровней. Процесс распределения протекает в обратном порядке. На верхнем уровне решается задача оптимального распределения ресурсов. Модель отражает то свойство большинства реальных ситуаций, что требования потребителей имеют некоторую неопределенность (иногда определяемую субъективными факторами, иногда – производственными), а потому могут удовлетворяться с некоторой степенью приближения, причем потребитель может получать некоторое возмещение за отклонение распределенного ему ресурса от заказанного идеального образца. В современных условиях бурного развития информационных технологий и электронной торговли (в том числе в Интернет-магазинах) описанная выше модель заслуживает внимания.

Экономико-математическое моделирование с целью нахождения оптимальных решений было продемонстрировано на трех различных по своей природе примерах - системы моделей, исходящих из классической модели Вильсона, двухуровневой модели, модели оптимизации объемов поставок на базу (склад). Это те постановки, которые мы изучали. Масса моделей сознательно оставлена вне рассмотрения. К настоящему времени системы управления запасами создаются применительно к конкретным производственным процессам на тех или иных предприятиях, в тех или иных производственных системах, поэтому нельзя надеяться на создание единой теории, годной для всех случаев. Впрочем, такова же судьба смежных областей научно-технического знания - теории массового обслуживания (теории очередей), теории надежности. Поэтому мы сочли полезным решение ряда важных общих проблем продемонстрировать на отдельных примерах.

Приходится констатировать, что многие авторы учебников по логистике не знают, что в классической модели Вильсона оптимизацию надо проводить по дискретному множеству значений размеров партий, а не по всему положительному лучу. Это вызвано тем, что такие авторы не формулируют строго изучаемую модель, а после наводящих соображений переходят к правдоподобным рассуждениям, которые с математической точки зрения оказываются неверными. Отметим, что методологически строгий и полный анализ классической модели Вильсона был проведен нами в работе [166], в которой эта модель излагалась в наиболее простой форме, поскольку предназначалась для преподавания школьникам средних классов (например, вместо интегралов систематически рассматривались площади под графиком). Тогда мы рассматривали вопрос: какую экономико-математическую модель наиболее целесообразно рассматривать в математических кружках (в терминах тех времен – при внеклассной работе по математике). Выбор пал на модель Вильсона, поскольку она, с одной стороны, достаточно широко применяется в практической деятельности, с другой стороны, ее теория может быть полностью рассказана школьникам с их слабой подготовкой по математике (по сравнению со студентами или исследователями). Линейное программирование также полезно при решении практических задач, но рассказать школьникам можно лишь условные примеры, позволяющие находить оптимальные решения графически (при рассмотрении геометрических фигур).

Отметим, что для двухуровневой модели управления запасами выше приведены найденные оптимальные (для горизонта планирования T) значения нижнего и верхнего уровней. Эти формулы исправляют ошибочные утверждения предшественников (подробности приведены в монографии [170]). Математическая техника понадобилась продвинутая – теория сумм случайного числа случайных слагаемых.

Заключение

В современных условиях необходимо интенсивное применение математических методов и моделей для модернизации управления предприятиями с целью обеспечения их экономического развития. Однако исходные данные могут быть измерены лишь с некоторой точностью, предпосылки моделей отражают реальность с методическими погрешностями. Поэтому необходимо изучение устойчивости выводов, полученных с помощью математических методов и моделей экономических явлений и процессов, по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок. Разработке и развитию устойчивых математических методов и моделей и посвящена настоящая диссертационная работа.

Исходя из концепции устойчивости разработан новый подход к обоснованию, выбору и созданию экономико-математических методов и моделей в рассматриваемой области. На его основе получены новые научные результаты, относящиеся к разработке и развитию математического аппарата анализа экономических систем, прежде всего непараметрической и нечисловой статистики. Разработан и исследован ряд устойчивых математических методов и моделей процессов управления в функциональных областях производственно-хозяйственной деятельности предприятий.

Основные результаты диссертационной работы таковы:

1. Предложена общая схема устойчивости, позволяющая проводить разработку и развитие ЭММиМ на основе единого методологического подхода к изучению устойчивости выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок. Ориентация осуществлена на моделирование процессов управления предприятиями. Выделены и изучены частные постановки проблем устойчивости, в том числе устойчивости по отношению к изменению данных, их объемов и распределений, к временным характеристикам. Обоснована необходимость разработки непара-

метрических статистических методов и анализа нечисловых данных. Предложен принцип уравнивания погрешностей.

2. На основе концепции устойчивости по отношению к временным характеристикам получена характеризация моделей с дисконтированием, обосновано применение асимптотически оптимальных планов для экономико-математических моделей процессов стратегического управления предприятиями (моменту начала реализации проекта, горизонту планирования).

3. Разработан ряд непараметрических (устойчивых к изменению распределения результатов наблюдений) статистических методов для решения конкретных задач управления промышленными предприятиями. Рассмотрены задачи оценивания характеристик распределений данных, прогнозирования, сегментации рынка (проверки однородности независимых и связанных выборок) и др. При этом найдены условия применимости критериев Стьюдента и Вилкоксона. Обоснованы состоятельные критерии проверки однородности.

4. Разработаны статистические методы описания данных, оценивания, проверки гипотез для результатов наблюдений, лежащих в пространствах общей природы. В частности, введены определения эмпирических и теоретических средних, получены законы больших чисел, установлено асимптотическое поведение решений экстремальных статистических задач, предложены и изучены непараметрические оценки плотности распределения вероятности, найдено асимптотическое распределение статистик интегрального типа. Важную роль в нечисловой статистике играют задачи оптимизации и результаты общей топологии. Статистика в пространствах произвольной природы основывается на систематическом использовании расстояний или мер близости (мер различия) между объектами нечисловой природы.

5. Развиты математические методы моделирования и анализа конкретных типов объектов нечисловой природы. Установлены связи между различными видами объектов нечисловой природы, построены соответствующие вероятностные модели порождения нечисловых данных. Дана характеризация средних величин с помощью шкал измерения, указан способ сведения нечетких множеств к случайным, развиты методы проверки гипотез (согласованности, однородности, независимости) для бинарных данных (люсианов) в асимптотике растущей размерности, разработана асимптотическая статистика интервальных данных на основе введенных в работе понятий нотны и рационального объема выборки.

6. Разработаны устойчивые ЭММиМ для решения ряда задач модернизации управления предприятиями, в частности, при использовании технологий экспертных оценок, в инновационном и инвестиционном менеджменте, при управлении качеством, материальными ресурсами предприятия; построена аддитивно-мультипликативная модель оценки рисков.

7. Полученные в диссертационной работе результаты, выводы и рекомендации, теоретические основы и методология развивают и дополняют возможности разработчиков ЭММиМ, предназначенных для модернизации управления предприятиями, в направлении изучения устойчивости таких методов и моделей по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок. Они могут быть рекомендованы для использования при проектировании и модернизации технологий управления, систем информационно-аналитической поддержки процессов принятия решений. Разработанные в диссертации методы и алгоритмы (прежде всего непараметрические статистические методы и методы анализа нечисловой информации, в том числе экспертных оценок, ориентированные на использование в функциональных областях производственно-хозяйственной деятельности предприятий) целесообразно включать в состав программного обес-

печения систем автоматизированного управления предприятиями различных отраслей.

8. На основе проведенных исследований разработаны учебные курсы по таким дисциплинам, как «Эконометрика», «Организационно-экономическое моделирование», «Прикладная статистика», а также «Теория принятия решений», «Экспертные оценки», «Методы прогнозирования», «Оценка и управление рисками» и др., на основе новой исследовательской парадигмы подготовлена серия учебников [99, 200, 210, 213, 225] и учебных пособий [207, 216, 243]. В результате выполнены решения Учредительного съезда Всесоюзной статистической ассоциации (октябрь 1990 г.) и последующие решения Российской ассоциации статистических метолов и Российской академии статистических методов о необходимости представления (в развернутой форме) научной и педагогической общественности новой парадигмы прикладной статистики, эконометрики и организационно-экономического моделирования.

Список использованной литературы

1. Алешин Д.Н. Экономическое обоснование эффективности инвестиционных проектов на предприятиях на основе применения эконометрического метода интервальной оценки. Автореф. дисс. … канд. эконом. наук. – М.:МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 16 с.

2. Алпеев А.С. Проблемы корректного определения термина «риск» и терминов на его основе // Надежность, 2005, № 1 (12), С.53-59.

3. Анализ на проблемных сетях / Под ред. С.А. Петровского. - М.: Институт мировой экономики и международных отношений АН СССР, 1980.

4. Анализ нечисловой информации / Тюрин Ю.Н., Литвак Б.Г., Орлов А.И., Сатаров Г.А., Шмерлинг Д.А. - М.: Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981. – 80 с.

5. Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях / Под редакцией В.Г. Андреенкова, А.И.Орлова, Ю.Н.Толстовой. - М.: Наука, 1985. – 222 с.

6. Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ. – М.: Мир, 1982. – 488 с.

7. Багриновский К.А., Бусыгин В.П. Математика плановых решений. - М.: Наука, 1980. – 224 с.

8. Балабанов И.Т. Риск-менеджмент. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 192 с.

9. Бадалова А.Г. Управление рисками производственных систем: теория, методология, механизмы реализации. – М.: «Станкин», «ЯНУС-К», 2006. – 328 с

10. Барский Б. В., Соколов М. В. Средние величины, инвариантные относительно допустимых преобразований шкалы измерения // Заводская лаборатория. - 2006. - Т.72. - №1. – С.59-66.

11. Беляев Ю.К. Вероятностные методы выборочного контроля. - М.: Наука, 1975. - 407 с.
12. Бир Ст. Кибернетика и управление производством. – М.: Наука, 1965. – 391с.
13. Бир Ст. Мозг фирмы. – М.: Радио и связь, 1993. – 416с.
14. Блекуэлл Д., Гиршик М. Теория игр и статистических решений. - М.: ИЛ, 1958.
15. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. - М.: Наука, 1983. - 328 с.
16. Бойко С.В. Формирование механизма управления развитием экономики промышленных комплексов на основе коммерциализации высокотехнологических проектов государственных бюджетных организаций. Автореф. дисс. … канд. эконом. наук. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 16 с.
17. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 308 с.
18. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.
19. Борисова И. А., Загоруйко Н. Г., Кутненко О. А. Критерии информативности и пригодности подмножества признаков, основанные на функции сходства // Заводская лаборатория. 2008. №1, С.68 – 71.
20. Боровков А.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1976. - 352 с.
21. Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука, 1984. - 472 с.
22. Бром А.Е., Колобов А.А., Омельченко И.Н. Интегрированная логистическая поддержка жизненного цикла наукоемкой продукции. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. - 296 с.
23. Бродецкий Г.Л. Управление запасами. – М.: Эксмо, 2008. – 352 с.
24. Букан Д., Кенигсберг Э. Научное управление запасами. Пер. с англ. - М.: Наука, 1967.

25. Бурков В.Н. Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: СИНТЕГ, 2001. – 124 с.
26. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять организациями. - М.: СИНТЕГ, 2004. – 400 с.
27. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. - М.: Наука, 1978. - 400 с.
28. Бэстенс Д.Э., Берт В.М. ван дер, Вуд Д. Нейронные сети и финансовые рынки: принятие решений в торговых операциях. - М.: ТВП, 1998.
29. Ван-дер-Варден Б.Л. Математическая статистика. – М.: ИЛ, 1960. – 434 с.
30. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио, 1972.- 550 с.
31. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. - М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. - 910 с.
32. Виленский П.Л., Смоляк С.А., Лившиц В.Н. Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Дело, 2008. – 1104 с.
33. Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ. - М.: Финансы и статистика, 1981.
34. Вологжанина С.А., Орлов А.И. Об одном подходе к оценке рисков для малых предприятий (на примере выполнения инновационных проектов в ВУЗах) // Подготовка специалистов в области малого бизнеса в высшей школе. - М.: ЭЛИКС +, 2001. - С.40-53.
35. Вощинин А.П. Метод оптимизации объектов по интервальным моделям целевой функции. - М.: МЭИ, 1987.
36. Вощинин А.П., Акматбеков Р.А. Оптимизация по регрессионным моделям и планирование эксперимента. - Бишкек: Илим, 1992. – 164 с.
37. Вощинин А. П., Бронз П. В. Построение аналитических моделей по данным вычислительного эксперимента в задачах анализа чувствительно-

сти и оценки экономических рисков // Заводская лаборатория. - 2007. - Т.72. - №1. – С.101-105.
38. Вощинин А. П., Скибицкий Н. В. Интервальный подход к выражению неопределенности измерений и калибровке цифровых измерительных систем // Заводская лаборатория. - 2007. - Т.72. - №11. – С.66-71.
39. Всеобщее управление качеством: Учебник для вузов / О.П. Глудкин, Н.М. Горбунов, А.И. Гуров, Ю.В. Зорин: под ред. О.П. Глудкина. – М.: Горячая линия – Телеком, 2001. – 600 с.
40. Гаврилец Ю.Н. Целевые функции социально-экономического планирования. - М.: Экономика, 1983. – 157 с.
41. Гаджинский А. М. Основы логистики. – М.: ИВЦ «Маркетинг», 1995. – 124 с.
42. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев / Пер. с англ. - М.: Наука, 1971. – 376 с.
43. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. - М.: ИЛ, 1963. – 342 с.
44. Гермашев И.В., Дербишер В.Е., Морозенко Т.Ф., Орлова С.А. Оценка качества технических объектов с использованием нечетких множеств // Заводская лаборатория. 2001. Т.67. №1. С 65-68.
45. Глущенко В.В. Менеджмент: системные основы: 2-е изд., доп. и испр. - Железнодорожный, Моск.обл.: Крылья, 1998. - 224 с.
46. Гнеденко Б.В. Математика и контроль качества продукции.- М.: Знание, 1978. – 64 с.
47. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. - М.: Наука, 1965. - 524 с.
48. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. - М.: Наука, 1966. - 301 с.

49. Гнеденко Б.В., Королюк В.С. О максимальном расхождении двух эмпирических распределений. // Доклады АН СССР. 1951. Т.80. № 4. С.525–528.
50. Гольштейн Е.Г. Выпуклое программирование (элементы теории). – М.: Наука, 1970.
51. Горбань А.Н. Обучение нейронных сетей. - М.: Параграф, 1990. – 159 с.
52. Горбань А.Н., Россиев Д.А. Нейронные сети на персональном компьютере. - Новосибирск: Наука, 1996. – 276 с.
53. Горшков А.Ф., Евтеев Б.В., Коршунов В.А., Титов В.А., Фролов Е.Б. Компьютерное моделирование менеджмента. - М.: Экзамен, 2004. – 528 с.
54. Горский В.Г. Безопасность объектов в техносфере (проблемы химической безопасности) // Заводская лаборатория. - 2005. - Т.71. - №1. - С.3-10.
55. Горский В.Г., Гриценко А.А., Орлов А.И. Метод согласования кластеризованных ранжировок // Автоматика и телемеханика. 2000. №3. С.179-187.
56. ГОСТ 11.011-83. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров гамма-распределения / Орлов А.И., Миронова Н.Г. и еще 5 соавторов. - М.: Изд-во стандартов, 1984. - 53 с. - Переиздание: М.: Изд-во стандартов, 1985. - 50 с.
57. Губко М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур. – М. ЛЕНАНД, 2006. – 264 с.
58. Гублер Е.В., Генкин А.А. Применение критериев непараметрической статистики в медико-биологических исследованиях. – Л.: Медицина, 1973. – 144 с.
59. Гуськова Е.А. Разработка организационно-экономических методов повышения эффективности деятельности промышленного предприятия на основе эконометрического подхода. Автореф. дисс. … канд. эконом. наук. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 16 с.

60. Гуськова Е.А., Орлов А.И. Информационные системы управления предприятием в решении задач контроллинга // Контроллинг. - 2003. - № 1(5). - С.52-59.
61. Джини К. Средние величины. - М.: Статистика. 1970. - 556 с.
62. Джонстон Дж. Эконометрические методы.- М.: Финансы и статистика, 1980. – 443 с.
63. Драймз Ф. Распределенные лаги: проблема выбора и оценивания моделей. - М.: Финансы и статистика, 1982. – 384 с.
64. Дроздова Е. Ю. Роль логистико-ориентированного подхода в обеспечении конкурентоспособности при диверсификации предприятия // Бизнес и логистика - 2001: Тез. докл. Московского международного логистического форума. - Москва, 2001. - С.46-48.
65. Друянова Г.Б., Орлов А.И. Непараметрическое оценивание коэффициентов вариации технических характеристик и показателей качества // Надежность и контроль качества. 1987. №7. С.10-16.
66. Дэвид Г. Метод парных сравнений. - М.: Статистика, 1978.- 144 с.
67. Дыбская В.В. Управление складированием в цепях поставок . –М.: Альфа-пресс, 2009 - 720 с.
68. Дыбская В.В., Зайцев Е.И., Сергеев В.И., Стерлигова А.Н. Логистика: интеграция и оптимизация логистических бизнес-процессов в цепях поставок. – М.: Эксмо, 2008. - 944 с.
69. Душкесас Р.Ф. Проблемы устойчивости в классической модели управления запасами. Дипломная работа. М.: Ф-т экономической кибернетики МИНХ им. Г.В. Плеханова, 1977. – 70 с.
70. Ежегодник экономического роста – 2007. – М.: Министерство промышленности и энергетики РФ, 2008. – 136 с.
71. Енгалычев О.В. Совершенствование системы управления операционным риском на предприятии. Автореф. дисс. … канд. экон. наук. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. - 16 с.

72. Егорова Л.А., Харитонов Ю.С., Соколовская Л.В. О применении непараметрического Х-критерия Ван-дер-Вардена при статистической обработке результатов наблюдений // Заводская лаборатория. 1976. Т.42. N 10. С. 1237.
73. Загонова Н.С., Орлов А.И. Эконометрическая поддержка контроллинга инноваций. Нечеткий выбор // Российское предпринимательство. 2004. №4. С.54-57.
74. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 166 с.
75. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
76. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. - М.: Наука, 1986. - 416 с.
77. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. - М.: Наука, 1979. - 528 с.
78. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1984. – 248 с.
79. Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. – М.: Наука, 1972. – 656 с.
80. Калачанов В.Д., Кобко Л.И. Экономическая эффективность внедрения информационных технологий. - Москва: МАИ, 2006.- 180 с.
81. Камень Ю.Э., Камень Я.Э., Орлов А.И. Реальные и номинальные уровни значимости в задачах проверки статистических гипотез // Заводская лаборатория. 1986. Т.52. No.12. С.55-57.
82. Канторович Л.В. Математические модели организации и планирования производства. - Л.: ЛГУ, 1939.
83. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Наука, 1959.

84. Канторович Л.В. Оптимальные решения в экономике. - М.: Наука, 1972. -231 с.
85. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 900 с.
86. Карминский А.М., Пересецкий А.А., Петров А.Е. Рейтинги в экономике: методология и практика. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 240 с.
87. Келли Дж. Общая топология. - М.: Наука, 1968. - 384 с.
88. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения. - М.: Советское радио, 1972.
89. Кендэл М. Ранговые корреляции. - М.: Статистика, 1975. - 216 с.
90. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть I. - М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. - 432 с.
91. Клементьева С. В**.** Применение теории нечетких множеств для измерения и оценки эффективности реализации наукоемкой продуктовой инновации // Заводская лаборатория. 2006. Т.72. № 11. С.65-68.
92. Ковалев А.П. Теория управления корпоративным имуществом. – М.: ФГНУ «Росинформагротех», 2008. – 312 с.
93. Ковалев В.В. Методы оценки инвестиционных проектов. - М.: Финансы и статистика, 1998. – 144 с.
94. Кокс Д.Р., Хинкли Д.В. Теоретическая статистика. – М.: Мир, 1978. – 560 с.
95. Колмогоров А.Н. Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю. - Л.: ДНТП, 1951. - 22 с.
96. Колмогоров А.Н. Об определении среднего // Избр. труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 136–138.
97. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
98. Колобов А. А. Омельченко И.Н. Основы промышленной логистики. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1998. - 116 с.

99. Колобов А.А., Омельченко И.Н., Орлов А.И. Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость. – М.: Экзамен, 2008. – 621 с.
100. Контроллинг в бизнесе. Методологические и практические основы построения контроллинга в организациях / Карминский А.М., Оленев Н.И., Примак А.Г., Фалько С.Г. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 256 с.
101. Контроллинг: учебник / А.М. Карминский, С.Г. Фалько, А.А. Жевага, Н.Ю. Иванова; под ред. А.М. Карминского, С.Г. Фалько. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 336 с.
102. Корнеев Д.С. Использование аппарата нейронных сетей для создания модели оценки и управления рисками предприятия // Управление большими системами. Вып. 17. – М.: ИПУ РАН, 2007. С.81-102.
103. Костоглодов Д.Д., Харисова Л.М. Распределительная логистика. – Ростов-на-Дону: «Экспертное бюро», 1997. – 127 с.
104. Кравченко Г.Г., Орлов А.И. О статистическом приемочном контроле порошкообразных материалов // Надежность и контроль качества. 1991. No.2. С.37-39.
105. Крамер Г. Математические методы статистики / Пер. с англ. / 2-е изд. - М.: Мир, 1975. – 648 с.
106. Краснов С.В., Трубачёва С.И. Использование принципов логистики в математическом моделировании экономических систем и процессов //Математические методы и информационные технологии в экономике: Тез. конференции. – Пенза. -2000. -С.123-125.
107. Кривцов В.С., Орлов А.И., Фомин В.Н. Современные статистические методы в стандартизации и управлении качеством продукции // Стандарты и качество. 1988. №3. - С.32-36.
108. Крюкова Е.М. Прогнозирование цен на лом черных металлов // Заводская лаборатория. 2008. Т.73. №7. С. 67 – 72.

109. Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г. Оптимальное управление в экономике: Теория и приложения. Изд. 2-е, перераб., доп. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 224 с.

110. Левин Б.Р., Демидович Н.О. Использование непараметрических методов при обработке результатов испытаний на надежность // Надежность средств связи: Сб.тр. Киев: Техніка, 1976. С.59–72.

111. Ланкастер К. Математическая экономика. - М.: Советское радио, 1972.

112. Лапидус В.А. (сост.) Системы, методы и инструменты эффективного менеджмента: Материалы 16-го межгосударственного семинара 25-27 мая 2004 года. – Н.-Новгород: Приритет, 2004. – 120 с.

113. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. – М.: Наука, 1979. – 200с.

114. Лебег А. Об измерении величин. – М.: Либроком, 2009. – 206 с.

115. Лившиц В.Н., Лившиц С.В. Макроэкономические теории. Реальные инвестиции и государственная российская экономическая политика. – М.: ЛКИ, 2008. – 248 с.

116. Линдерс М. Р., Фирон Х. Е. Управление снабжением и запасами. Логистика. – СПб.: Виктория-плюс, 2006. – 768 с.

117. Литвак Б.Г. Экспертная информация: методы получения и анализа. - М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.

118. Литвак Б.Г. Экспертные оценки и принятие решений. - М.: Патент, 1996. - 272 с.

119. Литвак Б.Г. Экспертиза в России // Заводская лаборатория. 2000. Т.66. № 7. С. 61-66.

120. Литвак Б.Г. Экспертные технологии управления. 2-е изд. - М.: Дело, 2004.- 398 с.

121. Логистика / Под ред. Б.А. Аникина. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 327 с.

122. Логистико-ориентированное управление организационно-экономической устойчивостью промышленных предприятий в рыночной

среде / И.Н. Омельченко, А.А. Колобов, А.Ю. Ермаков и др. Под ред. А.А. Колобова. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. - 204 с.
123. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. - М.: Наука, 1984. – 392 с.
124. Лумельский Я.П. Статистические оценки результатов контроля качества. - М.: Изд-во стандартов, 1979. - 200 с.
125. Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. - М.: ИЛ, 1961. – 642 с.
126. Майстров Л.Е. Теория вероятностей: Исторический очерк. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
127. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М. Наука, 1973.
128. Малая российская энциклопедия прогностики / И.В. Бестужев-Лада (гл. редактор), А.И. Агеев и др. – М.: ИЭС, 2007. -328 с.
129. Маленво Э. Статистические методы эконометрии. - М.: Статистика, 1975 (вып.1), 1976 (вып.2).
130. Маркова Е.В., Никитина Е.П. Математическая теория эксперимента: история, развитие, будущее // Заводская лаборатория. 2002. Т.68. No.1. С.112-118.
131. Математическая энциклопедия. Т.5. – М.: Советская Энциклопедия, 1985. – 1248 с.
132. Математическое моделирование процессов налогообложения (подходы к проблеме) / Иванова Нат. Ю., Кастосов М.А., Орлов А.И. и др. - М.: ЦЭО Минобразования РФ, 1997. – 232 с.
133. Медведев В.Н., Орлов А.И. Программно-алгоритмическое обеспечение статистических методов в САПР стандартов // Тезисы докладов III Всесоюзной школы-семинара «Программно-алгоритмическое обеспечение прикладного многомерного статистического анализа». - М.: ЦЭМИ АН СССР, 1987. С. 313-314.

134. Менеджмент. / Боголюбов С.А., Прокофьева Ж.В., Орлов А.И. и др. - М.: Знание, 2000. - 288 с.
135. Мердок Дж. Контрольные карты. - М.: Финансы и статистика, 1986. - 132 с.
136. Методика. Проверка однородности двух выборок параметров продукции при оценке ее технического уровня и качества / А.И. Орлов, Н.Г. Миронова, О.М. Черномордик и др. - М.: ВНИИС Госстандарта СССР, 1987. - 116 с.
138. Митрохин И.Н., Орлов А.И. Обнаружение разладки с помощью контрольных карт // Заводская лаборатория. 2007. Т.73. №5. - С.74-78.
139. Михеев А.А. Экологическое страхование в США: тенденции развития // Российское предпринимательство. 2000. No.12. С.76-84. 2001. № 1. С.62-68.
140. Мищенко А.В. Методы управления инвестициями в логистических системах. - М.: ИНФРА-М, 2009. - 363 с.
141. Моисеев Н.Н. Математические модели экономической науки. - М.: Знание, 1973. – 64 с.
142. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. - М.: Наука, 1979.
143. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. - М.: Наука, 1981. - 488 с.
144. Моргенштейн О. О точности экономико-статистических наблюдений. - М.: Статистика, 1968. - 324 с.
145. Моткин Г.А. Основы экологического страхования. - М.: Наука, 1996. - 192 с.
146. Муравьева В.С., Точка встречи: асимптотическое распределение уровня качества и временного лага // Заводская лаборатория. 2008. Т.74. No.3. С.70-73.

147. Муравьева В.С., Орлов А.И. Организационно-экономические проблемы прогнозирования на промышленном предприятии // Управление большими системами. Выпуск 17. М.: ИПУ РАН, 2007. С.143-158.
148. Муравьева В.С., Орлов А.И. Непараметрическое оценивание точки пересечения регрессионных прямых // Заводская лаборатория. 2008. Т.74. No.1. С.63-68.
149. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 208 с.
150. Налимов В.В. Вероятностная модель языка. - М.: Наука, 1979. – 303 с.
151. Налимов В.В. Спонтанность сознания. Вероятностная теория смыслов и смысловая архитектоника личности. – М.: Изд-во «Прометей» МГПИ им. Ленина, 1989. – 288 с.
152. Налимов В.В. В поисках иных смыслов. – М.: Прогресс, 1993. – 280 с.
153. Науман Э. Принять решение – но как?: Пер. с нем. – М.: Мир, 1987. – 198 с.
154. Научно-методические аспекты анализа аварийного риска / Горский В.Г., Моткин Г.А., Швецова-Шиловская Т.Н. и др. – М.: Экономика и информатика, 2002. – 260 с.
155. Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. - М.: Мир, 1975. - 500 с.
156. Нейман Дж.фон, Моргенштейн О. Теория игр и экономическое поведение. - М.: Наука, 1970.
157. Неруш Ю.М. Коммерческая логистика. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 271 с.
158. Неуймин Я.Г. Модели в науке и технике. История, теория, практика. - Л.: Наука, 1984. - 190 с.
159. Никитин Я.Ю. Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. - М.: Наука, 1995. - 240 с.
160. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. – М.: СИНТЕГ, 2007. – 668 с.

161. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: Московский психолого-социальный институт, 2005. – 584 с.
162. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 248 с.
163. Омельченко И.Н. Методология, методы и модели системы управления организационно-экономической устойчивостью наукоемкого производства интегрированных структур. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 240 с.
164. Организация и планирование машиностроительного производства (производственный менеджмент). / К.А. Грачева, М.К. Захарова, Л.А.Одинцова и др.: Под ред. Ю.В. Скворцова, Л.А.Некрасова. – М.: Высшая школа, 2003. - 470 с.
165. Организация промышленных корпоративных структур на основе логистико-ориентированной системы критериальных оценок / С. В. Краснов, Н. Ю. Брусникин, Н. О. Куралесова. Под ред. И. Н. Омельченко. – Тольятти: Изд-во ТолПИ, 2000. – 181 с.
166. Орлов А.И. Про управление запасами // Подготовка студентов педагогических институтов к внеурочной работе по математике. - Вологда: ВГПИ, 1975. С.10-20.
167. Орлов А.И. Математические модели отдельных сторон обучения математике //Сб. научно-методических статей по математике. (Проблемы преподавания математики в вузах.) Вып.7. - М.: Высшая школа, 1978. С.28-34.
168. Орлов А.И. Существование асимптотически оптимальных планов в дискретных задачах динамического программирования // Многомерный статистический анализ (математическое обеспечение). - М.: ЦЭМИ АН СССР, 1979. - С.201-213.
169. Орлов А.И. Горизонтная устойчивость двухуровневой модели управления запасами. – В сб.: Многомерный статистический анализ (математическое обеспечение). - М.: ЦЭМИ АН СССР, 1979. - С.187-199.

170. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М.: Наука, 1979. - 296 с.
171. Орлов А.И. Задачи оптимизации и нечеткие переменные. - М.: Знание, 1980. – 64 с.
172. Орлов А.И. Асимптотика решений экстремальных статистических задач. – Анализ нечисловых данных в системных исследованиях. Сб. трудов. Вып.10. - М.: ВНИИСИ, 1982. С. 4-12.
173. Орлов А.И. Махаланобиса расстояние. – В кн.: Математическая энциклопедия. Т.3. - М.: Советская энциклопедия, 1982. - С.626.
174. Орлов А.И. Непараметрические оценки плотности в топологических пространствах. – В сб.: Прикладная статистика. Ученые записки по статистике, т.45. - М.: Наука, 1983. - С. 12-40.
175. Орлов А.И. Общий взгляд на статистику объектов нечисловой природы // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. - М.: Наука, 1985, с.58-92.
176. Орлов А.И. Как обеспечить единство терминологии? // Стандарты и качество. - 1987. - №10. - С.52-52.
177. Орлов А.И. Об оптимизации выборочного контроля качества продукции. // Стандарты и качество. - 1989. - №3. - С.91-94.
178. Орлов А.И. Статистика объектов нечисловой природы // Заводская лаборатория. - 1990. - Т.56. - №3. - С.76-83.
179. Орлов А.И. Заметки по теории классификации // Социология: методология, методы, математические модели». 1991. №2. С.28-50.
180. Орлов А.И. Создана единая статистическая ассоциация // Вестник Академии наук СССР. 1991. № 7. С.152-153.
181. Орлов А.И. О современных проблемах внедрения прикладной статистики и других статистических методов // Заводская лаборатория. 1992. Т.58. №1. С. 67-74.

182. Орлов А.И. Внедрение современных статистических методов с помощью персональных компьютеров // Качество и надежность изделий. No.5(21). - М.: Знание, 1992. - С.51-78.
183. Орлов А.И. Экспертные оценки // Заводская лаборатория. 1996. Т.62. No.1. С.54-60.
184. Орлов А.И. Математическое обеспечение сертификации: сравнительный анализ диалоговых систем по статистическому контролю // Заводская лаборатория. 1996. Т.62. №7. С.46-49.
185. Орлов А.И. Ядерные оценки плотности в пространствах произвольной природы. – В сб.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. - Пермь: Пермский госуниверситет, 1996, с.68-75.
186. Орлов А.И. Сертификация и статистические методы // Заводская лаборатория. 1997. Т.63. №3. С. 55-62.
187. Орлов А.И. Современная прикладная статистика // Заводская лаборатория. 1998. Т.64. No.3. С. 52-60.
188. Орлов А.И. Метод оценивания длины периода и периодической составляющей сигнала //Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. научн. трудов. – Пермь: ПГУ, 1999. С.38-49.
189. Орлов А.И. Какие гипотезы можно проверять с помощью двухвыборочного критерия Вилкоксона? // Заводская лаборатория. 1999. Т.65. №1. С.51-55.
190. Орлов А.И. Репрезентативная теория измерений и ее применения // Заводская лаборатория. - 1999. - Т.65. - №3. - С. 57-62.
191. Орлов А.И. Сценарии социально-экономического развития России до 2007 г. // Обозреватель-Observer. 1999. №10 (117). С.47-50.
192. Орлов А.И. Статистический контроль по двум альтернативным признакам и метод проверки их независимости по совокупности малых выборок // Заводская лаборатория. 2000. Т.66. №1. С.58-62.

193. Орлов А.И. Сценарии социально-экономического развития России в XXI в. // Обозреватель-Observer. 2000. №10-11. С. 82-82.

194. Орлов А.И. Экологическое страхование // Российское предпринимательство. 2000. №11. С.104-108. №12. С.52-55.

195. Орлов А.И. О развитии методологии статистических методов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. научн. трудов. – Пермь: ПГУ, 2001. – С.118-131.

196. Орлов А.И. Статистический контроль качества продукции // Российское предпринимательство. 2001. №2. С.17-24.

197. Орлов А.И. Высокие статистические технологии и эконометрика в контроллинге // Российское предпринимательство. - 2001. - № 5. - С.91-93.

198. Орлов А.И. Нечисловая экономика и управление инвестиционным процессом // Российское предпринимательство. 2001. № 12. С.103-108.

199. Орлов А.И. Эконометрическая поддержка контроллинга // Контроллинг. 2002. №1. С.42-53.

200. Орлов А.И. Эконометрика. – М.: Экзамен, 2002, 2003 (изд. 2-е, испр. и дополн.), 2004 (изд. 3-е, испр. и дополн.). – 576с.

201. Орлов А.И. О проверке однородности двух независимых выборок // Заводская лаборатория. 2003. Т.69. №1. С.55-60.

202. Орлов А.И. Математические методы исследования и диагностика материалов // Заводская лаборатория. 2003. Т.69. №3. С.53-64.

203. Орлов А.И. Статистика интервальных данных. - Пятая международная конференция «Перспективы систем информатики» (8-9 июля 2003 г., Новосибирск, Академгородок, Россия). Рабочее совещание «Интервальная математика и методы распространения ограничений». Доклады и тезисы. – Новосибирск: Новосибирский центр Информационных Технологий «УниПро», 2003. С.143-148.

204. Орлов А.И. Высокие статистические технологии // Заводская лаборатория. 2003. Т.69. No.11. С.55-60.

205. Орлов А.И. Непараметрическое точечное и интервальное оценивание характеристик распределения // Заводская лаборатория. 2004. Т.70. No.5. С.65-70.
206. Орлов А.И. Методы проверки однородности связанных выборок // Заводская лаборатория. 2004. Т.70. No.7. С.57-61.
207. Орлов А.И. Принятие решений. Теория и методы разработки управленческих решений. - М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005. - 496 с.
208. Орлов А.И. Организационно-экономическое обеспечение инновационной деятельности //Инновационное развитие экономики: теория и практика: Материалы международной научно-практической конференции. - Ярославль: ЯрГУ, 2005. - С.181-184.
209. Орлов А.И. Математические методы исследования и теория измерений // Заводская лаборатория. 2006. Т.72. №1. С.67-70.
210. Орлов А.И. Прикладная статистика. - М.: Экзамен, 2006. - 672 с.
211. Орлов А.И. «Шесть сигм» - новая система внедрения математических методов исследования // Заводская лаборатория. 2006. Т.72. No.5. С.50-53.
212. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование инновационных процессов // Управление инновациями – 2006. Материалы международной научно-практической конференции. – М.: Доброе слово, 2006. – С.41-44.
213. Орлов А.И. Теория принятия решений. – М.: Экзамен, 2006. – 576 с.
214. Орлов А.И. Статистические методы прогнозирования // Малая российская энциклопедия прогностики. – М.: ИЭС, 2007. – С.148-153.
215. Орлов А.И. Моделирование и оценка результатов взаимовлияний факторов с помощью системы «ЖОК» // Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC’2007). Труды VII Международной конференции.– М.: ИПУ РАН, 2007. - С.214-217.

216. Орлов А.И. Оптимальные методы в экономике и управлении. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 41 с.
217. Орлов А.И. Неформальная информационная экономика будущего // Неформальные институты в современной экономике России: Материалы Третьих Друкеровских чтений.- М.: Доброе слово: ИПУ РАН, 2007. – С.72-87.
218. Орлов А.И. Непараметрический метод наименьших квадратов: учет сезонности // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. научн. трудов. Вып. 21. – Пермь: ПГУ, 2008. – С.59-72.
219. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование процессов управления промышленными предприятиями в условиях рисков инфляции // Стратегическое планирование и развитие предприятий. Секция 4 / Материалы Девятого всероссийского симпозиума. - М.: ЦЭМИ РАН, 2008. – С.124–126.
220. Орлов А.И. Экономико-математические методы в контроллинге и неформальная информационная экономика будущего // Формування ринковоі економіки: Зб. наук.праць. Спец. вип., присвяч. Міжнар. наук.-практ. конф. «Контролінг у бізнесі: теорія і практика». – К.: КНЕУ, 2008. – С.43-50.
221. Орлов А.И. Контроллинг организационно-экономических методов // Контроллинг. 2008. No.4(28). С.42-46.
222. Орлов А.И. Инновационная деятельность: организационно-экономическое обеспечение и Интернет-аукционы // Проблемы информационной экономики. Выпуск VII. Стратегия инновационного развития российской экономики. - М.: ЛИБРОКОМ, 2008. – С.325-345.
223. Орлов А.И. Статистические пакеты – инструменты исследователя // Заводская лаборатория. 2008. Т.74. No.5. С.76-78.
224. Орлов А.И. Философские основания устойчивого математического моделирования процессов управления промышленными предприятиями. -

Философия математики: актуальные проблемы: Тезисы Второй международной научной конференции; 28-30 мая 2009 г. – М.: МАКС Пресс, 2009. – С.284-287.
225. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: учебник : в 3 ч. Часть 1: Нечисловая статистика. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2009. – 541 с.
226. Орлов А.И. Тридцать лет статистики объектов нечисловой природы // Заводская лаборатория. 2009. Т.75. №5. С.55-64.
227. Орлов А.И., Гуськова Е.А. Информационные системы управления предприятием в решении задач контроллинга // Контроллинг, 2003, № 1(5), с.52-59.
229. Орлов А.И., Жихарев В.Н. Законы больших чисел и состоятельность статистических оценок в пространствах произвольной природы // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. – Пермь: Изд-во Пермского государственного университета, 1998. С.65-84.
230. Орлов А.И., Жихарев В.Н., Цупин В.А. Анализ динамики цен на продовольственные товары в Москве и Московской области // Научные труды Рижского института мировой экономики. Вып.2. - Рига: РИМЭ, 1998. С.19-25.
231. Орлов А.И., Жихарев В.Н. Новые результаты в экспертных оценках и экологическое страхование // Труды Четвертой всероссийской и Второй международной конференции «Теория и практика экологического страхования». Калининград-Москва, 2000. С.137-138.
234. Орлов А.И., Конюхова Т.А. Математические модели в экономике. Модель Вильсона управления запасами. - М.: МГИЭМ, 1994. – 31 с.
235. Орлов А.И., Орлова Л.А. Применение эконометрических методов при решении задач контроллинга // Контроллинг. 2003. №4(8). С.50-54.

236. Орлов А.И., Орлова Л.А. Эконометрика в обучении контроллеров // Контроллинг. 2004. No.3 (11). С.68-73.
237. Орлов А.И., Орлова Л.А. Интервальная оценка инфляции по независимой информации // Российское предпринимательство. 2004. № 10. С. 44-49.
238. Орлов А.И., Орлова Л.А. Социально-экологические аспекты управления в современной экономике // Проблема человеческого капитала: теория и современная практика: Материалы Вторых Друкеровских чтений. – М.: Доброе слово, 2007. – С.176 - 191.
239. Орлов А.И., Пейсахович Э.Э. Некоторые модели планирования оптимальных размеров поставок и начального запаса // Экономика и математические методы. 1975. Т.XI. №.4. С.681-694.
240. Орлов А.И., Поляков В.А. Информационно-правовые вопросы оценки Киотского договора // «Черные дыры» в российском законодательстве. 2004. №3. С.448-450.
241. Орлов А.И., Фалько С.Г. Информационно-аналитическая поддержка принятия решений при управлении инновациями // Управление инновациями – 2007: Материалы международной научно-практической конференции. - М.: Доброе слово: ИПУ РАН, 2007. – С.428-430.
242. Орлов А.И., Федосеев В.Н. Проблемы управления экологической безопасностью // Менеджмент в России и за рубежом. 2000. No.6. С.78-86.
243. Орлов А.И., Федосеев В.Н. Менеджмент в техносфере. – М.: Академия, 2003. – 384 с.
244. Пакет программ анализа данных ППАНД. / Легостаева И.Л., Орлов А.И. и еще 9 соавторов. - М.: Сотрудничающий центр ВОЗ по профессиональной гигиене, 1990. - 93 с.
245. Панде П., Холп Л. Что такое «Шесть сигм»? Революционный метод управления качеством. - М.: Альпина Бизнес Букс, 2004. - 158 с.

246. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. - М.: Инфра-М, 1994. – 256 с.
247. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. 416 с.
248. Пермяков Р.С. Экономический механизм экологического менеджмента. - М.: Экономика, 1998. – 324 с.
249. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. – М.: Мир, 2000.
250. Плетнева Н.Г. Теория и методология управления логистическими системами в условиях неопределенности. Автореф. дисс. … докт. эконом. наук. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический университет, 2008. – 37 с.
251. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. – М.: Физматлит, 2007. – 64 с.
252. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 255 с.
253. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970. – 452 с.
254. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
255. Прабху А. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. - М.: Машиностроение, 1969. – 256 с.
256. Практикум по эконометрике / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордеенко и др. – М.: Финансы и статистика. 2001. – 192 с.
257. Проектирование интегрированных производственно-корпоративных структур: эффективность, организация, управление / С.Н.Анисимов, А.А.Колобов, И.Н.Омельченко, А.И.Орлов, А.М. Иванилова, С.В. Краснов; Под ред. А.А. Колобова, А.И. Орлова. Научное издание. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 728 с.

258. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.) - М.: Наука, 1973.- 496 с.
259. Промышленная логистика. Логистико-ориентированное управление организационно-экономической устойчивостью промышленных предприятий в рыночной среде / И.Н. Омельченко, А.А. Колобов, А.Ю. Ермаков, А.В. Киреев; Под ред. А.А. Колобова. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 204 с.
260. Проскурин А.П. 2007/1990: гордиться пока особенно нечем… // Экономическая и философская газета. 2008. No.7.
261. Проценко О.Д. Логистика – важнейший фактор повышения конкурентоспособности организации // Российское предпринимательство. 2002. №10. С.16-21.
262. Психологические измерения. - М.: Мир, 1967.
263. Птускин А.С. Нечеткие модели и методы в менеджменте. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 216 с.
264. Пуарье Д. Эконометрия структурных изменений. - М.: Финансы и статистика, 1981.
265. Пурлик В. Логистика торгово-посреднической деятельности. - М.: Высшая школа, 1995. -202с.
266. Пфанцагль И. Теория измерений. - М.: Мир, 1976.
267. Радионов А.Р., Радионов Р.А. Менеджмент: нормирование и управление производственными запасами и оборотными средствами предприятия. - М.: Экономика, 2005. – 614 с.
268. Разработка эконометрических методов анализа нечисловых данных и прогнозирование индекса инфляции (шифр «Фильм») / Орлов А.И., Жихарев В.Н., Цупин В.А. и еще 18 исполнителей. - Научно-технический отчёт по НИР, рег. No.1313295. - М.: АОЗТ «ТРИВО», 1995. - 200 с.
269. РД 50-217-84. Методические указания по оценке научно-технического уровня стандартов на промышленную продукцию / Фомин В.Н., Орлов

А.И., Щептев А.В. и еще 16 соавторов. - М.: Изд-во стандартов, 1985. - 37 с.
270. Родников А. Н. Логистика: Терминологический словарь. – М.: Экономика, 1995. – 251 с.
271. Рыжиков Ю.И. Управление запасами. - М.: Наука, 1969.
272. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
273. Рыжикова Т.Н. Управление процессом маркетинга на предприятиях сферы услуг. – М.: Радио и связь, 2001. – 192 с.
274. Рыжикова Т.Н. Банковский маркетинг. – М.: Радио и связь, 2001. – 128 с.
275. Рыжикова Т.Н., Васильев С.В., Ковальчук О.А. Задачи и решения для маркетинга инновационных товаров. – М.: Радио и связь, 2005. – 160 с.
276. Саати Т.Л. Математические модели конфликтных ситуаций. - М.: Советское радио, 1977.
277. 372. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. - М.: Радио и связь, 1991. - 224 с.
278. 374. Савченко Н.Н. Технико-экономический анализ проектных решений. – М.: Экзамен, 2002. – 128 с.
279. Самуэльсон П. Экономика. Т.2. - М.: НПО «АЛГОН», 1992. – 416 с.
280. Саульев В.К. Математические модели теории массового обслуживания. - М.: Статистика, 1979. – 96 с.
281. Саульев В.К. Вероятностно-статистические методы теории исследования операций. – М.: Знание, 1973. – 56 с.
282. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. - М.: Мир, 1980. - 456 с.
283. Селезнев В.Д., Денисов К.С. Исследование свойств критериев согласия функции распределения данных с гауссовой методом Монте-Карло для малых выборок // Заводская лаборатория. 2005. Т.71. №1. С.68-72.
284. Семененко А.И., Сергеев В.И. Логистика. – М.: Союз, 2001. – 544 с.

285. Серов Г.П. Основы экологической безопасности. - М.: МНЭПУ, 1993. – 224 с.
286. Сидельников Ю.В. Теория и организация экспертного прогнозирования. - М.: ИМЭМО АН СССР, 1990. - 196 с.
287. Сидельников Ю.В. Технологии экспертного прогнозирования. – М.: Доброе слово – МАИ, 2004. – 284 с.
288. Сидельников Ю.В. Стратегические горизонты для России (внешнеполитические и военные аспекты - 2078 год). Предварительная программа прогнозных исследований. – М.: ИЭС, 2005. -72 с.
289. Сипатрина Л.С., Орлов А.И., Богатырев А.А. Рекомендации. Обоснование планов статистического приемочного контроля по альтернативному признаку при минимизации суммарных затрат. - М.: Изд-во стандартов, 1985. - 14 с.
290. Системы экологического управления / С.А.Боголюбов, А.Ф. Завальнюк, А.И.Орлов и др. – М.: «Европейский центр по качеству», 2002. – 224 с.
291. Смирнов Н.В. Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках. // Бюллетень МГУ им. М.В. Ломоносова. Сер. А. 1939. Т.2. № 2. С.3–14.
292. Смирнов Н.В. О приближении плотностей распределения случайных величин. – Ученые записки МГПИ им. В.П.Потемкина. 1951. Т.XVI. Вып.3. С. 69-96.
293. Смольников Р.В. Практическое применение моделей управления запасами // Контроллинг. 2007. №2 (22). С.52-60.
294. Смольников Р.В. Практическое применение математических моделей управления запасами // Заводская лаборатория. 2008. Т.73. №3. С.64-69.
295. Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности (теория ожидаемого эффекта). - М.: Наука, 2002. – 182 с.

296. Смоляк С.А. Интерполяция функций нескольких нечисловых переменных // Заводская лаборатория. 2007. Т.72. №3. С.69-76.
297. Смоляк С.А. Восстановление функций нескольких нечисловых переменных при наличии случайных ошибок наблюдения // Заводская лаборатория. 2007. Т.72. №5. С.67-73.
298. Смолянский М.Л. Таблицы неопределенных интегралов. - М.: ГИФМЛ, 1961. - 108 с.
299. Статистические методы повышения качества. / Под ред. Х. Кумэ. - М.: Финансы и статистика, 1990.- 301 с.
300. Стерлигова А.Н. Управление запасами в цепях поставок. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 430 с.
301. Стратегическое управление организационно-экономической устойчивостью фирмы: Логистико-ориентированное проектирование бизнеса / Под ред. Колобова А.А., Омельченко И.Н. – М.: МГТУ им Баумана, 2001. – 600 с.
302. Сычева Г.И., Колбачев Е.Б., Сычев В.А. Оценка стоимости предприятия (бизнеса). – Ростов н/Д: «Феникс», 2003. – 384 с.
303. Сэндидж Ч., Фрайбургер В., Ротцолл К. Реклама: теория и практика. - М.: Прогресс, 1989. - 630 с.
304. Тейл Г. Экономические прогнозы и принятие решений. - М.: Статистика, 1971. - 488 с.
305. Толстова Ю.Н. Измерения в социологии. - М.: Инфра-М, 1998. - 352 с.
306. Толстова Ю.Н. Измерение в социологии. – М.: КДУ, 2007. – 288 с.
307. Тюрин Ю.Н., Василевич А.П., Андрукович П.Ф. Статистические модели ранжирования. - В сб.: Статистические методы анализа экспертных оценок. - М.: Наука, 1977. - С.30-58.
308. Тюрин Ю.Н., Шмерлинг Д.С. Непараметрические методы статистики // Социология: методология, методы, математические модели. 2004. №18. С.154-166.

309. Уайт О. У. Управление производством и материальными запасами в век ЭВМ. - М.: Прогресс. 1978. – 302 с.
310. Уоссерман С. Нейрокомпьютерная техника. - М.: Мир, 1992. – 240 с.
311. Управление инвестициями. В 2-х т. Т.2 / В.В. Шеремет, В.М. Павлюченко, В.Д. Шапиро и др. - М.: Высшая школа, 1998. – 512 с.
312. Управление качеством окружающей среды. 1 том / С.А.Боголюбов, А.И.Орлов и др. - М.: МГИЭМ(ту), 2000. – 283 с.
313. Файоль А. Общее и промышленное управление. – Л.-М.: Центральный институт труда, 1924. Переиздание: Контроллинг. 1992. Вып. 2. 151 с.
314. Файоль А., Эмерсон Г., Тейлор Ф., Форд Г. Управление – это наука и искусство. – М.: Республика, 1992. – 349 с.
315. Фалько С.Г. Наука об организации производства: история, современность, перспективы. – М.: О-во «Знание» РСФСР, 1990. – 56 с.
316. Фалько С.Г. Эволюция концепций управления предприятиями промышленности. – М.: ЦЭМИ РАН, 2007. – 50 с.
317. Фалько С.Г. Контроллинг для руководителей и специалистов.- М.: Финансы и статистика, 2008. – 272 с.
318. Фалько С.Г., Иванова Н.Ю. Управление нововведениями на высокотехнологичных предприятиях. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 256 с.
319. Фалько С.Г., Орлов А.И. «Шесть сигм» как подход к совершенствованию бизнеса // Контроллинг. 2004. No.4(12). С.42-46.
320. Федосеев В.Н., Орлов А.И. Состояние рыночной мотивации труда в России. // Российское предпринимательство. 2000. No.6. С. 10-19.
321. Федосеев В.Н., Орлов А.И., Ларионов В.Г., Козьяков А.Ф. Управление промышленной и экологической безопасностью. - М.: Изд-во УРАО, 2002. – 220 с.
322. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. - М.: Наука, 1978. – 352 с.

323. Фишер Ф. Проблема идентификации в эконометрии. - М.: Статистика, 1978. – 224 с.
324. Форрестер Дж.В. Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика). – М.: Прогресс, 1971. – 344 с.
325. Хан Д. Планирование и контроль: концепция контроллинга. - М.: Финансы и статистика, 1997. - 800 с.
326. Харольд Е.Ф., Линдерс М.Р. Управление снабжением и запасами. Логистика. – СПб.: Полиграфуслуги, 2006. – 768 с.
327. Хвастунов Р.М., Феофанов А.Н., Корнеева В.М., Нахапетян Е.Г. Квалиметрия в машиностроении. – М.: Экзамен, 2008. – 288 с.
328. Хедли Д., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. Пер. с англ. - М.: Наука, 1969. – 511 с.
329. Холлендер М., Вульф Д. Непараметрические методы статистики. - М.: Финансы и статистика, 1983. - 518 с.
330. Хэнссмен Ф. Применение математических методов в управлении производством и запасами. Пер. с англ. - М.: Прогресс, 1966.
331. Царегородцев Г. А. и др. Платежи за пользование природными ресурсами. Комментарий. — М.: Дело, 1998. – 252 с.
332. Ченцов Н.Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. - М.: Наука, 1972. – 520 с.
333. Чернов В.А. Анализ коммерческого риска. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 128 с.
334. Четыркин Е.М., Васильева Н.Е. Выборочные методы в аудите. – М.: Дело, 2003. – 144 с.
335. Шахнов И.Ф. Экспресс-анализ упорядоченности интервальных величин // Автоматика и телемеханика. 2004. №10. С.67-84.
336. Шевцова И.Г. Уточнение абсолютной константы в классическом неравенстве Берри-Эссеена // Статистические методы оценивания и проверки

гипотез. Межвуз. сб. научн. трудов. Вып. 21. – Пермь: ПГУ, 2008. – С.159-168.
337. Шубкин В.П. Социологические опыты. - М.: Мысль, 1970. - 256 с.
338. Щукина Г.И. Проблема познавательного интереса в педагогике. - М.: Педагогика, 1971. - 352 с.
339. Ширяев В.И. Модели финансовых рынков: Нейросетевые методы в анализе финансовых рынков. – М.: УРСС 2007. - 224 с.
340. Шмален Г. Основы и проблемы экономики предприятия. - М.: Финансы и статистика, 1996. - 512 с.
341. Шмерлинг Д.С. и др. Экспертные оценки. Методы и применения // Уч. записки по статистике, т.29. Статистические методы экспертных оценок. - М.: Наука, 1977. С.290-382.
342. Шумпетер И. Теория экономического развития. М.: Прогресс, 1982. – 270 с.
343. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981. — 112 с.
344. Экологический учет для предприятий / Конференция ООН по торговле и развитию. - М.: Финансы и статистика, 1997. – 200 с.
345. Экология / Боголюбов С.А., Орлов А.И. и др. - М.: Знание, 1999. - 288 с.
346. Экология и экономика природопользования / Под ред. Э.В. Гирусова. – М.: Инфра-М - Норма, 1998. - 436 с.
347. Экономика инновационной деятельности наукоемких предприятий / А.А. Колобов, В.В. Кочетов, И.Н. Омельченко и др. : Под ред. А.А. Колобова, И.Н. Омельченко. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 384 с.
348. Экономика предприятия / И.Э. Берзинь, С.А. Пикунова, Н.Н. Савченко, С.Г. Фалько; Под ред. С.Г. Фалько. – М.: Дрофа, 2003. - 368 с.
349. Экспертные оценки: современное состояние и перспективы использования в задачах экологического страхования / Горский В.Г., Орлов А.И.,

Жихарев В.Н., Цупин В.А., Степочкин А.Н., Васюкевич В.А. // Труды Второй Всероссийской конференции «Теория и практика экологического страхования». - М.: Ин-т проблем рынка РАН, 1996. С.20-23.
350. Юдин Д.Б., Юдин А.Д. Экстремальные модели в экономике. - М.: Экономика, 1979.
351. Ядов В.А. Стратегии и методы качественного анализа данных // Социология: методология, методы, математические модели. 1991. No.1. С.14-31.
352. Янч Э. Прогнозирование научно-технического прогресса. - М.: Прогресс, 1990. - 568 с.
353. Australian / New Zealand Standart. Risk Management. AS/NZS 4360:2004.
354. Beastans D.E., Berg W.M., Wood D. Neural Network Solutions for Trading in Financial Markets. Amsterdam: Pitmap Publishing, 1996.
355. Bellman R., Kalaba R., Zadeh L. Abstractions and Pattern Classification / Journal of Mathematical Analysis Applications. 1966. Vol.13. Pp.1-7.
356. Broody M. Helping Workers Work Smarter / Fortune. June 8. 1987. Pp.86-88.
357. Drucker P.F. Managing in Turbulent Times. – Heinemann. 1980.
358.. Drucker P.F. The Frontiers of Management. – Heinemann. 1987.
359. Goodman I.R. Fuzzy sets as equivalence classes of random sets // Fuzzy Set and Possibility Theory: Recent Developments. - New York-Oxford-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt, Pergamon Press, 1982. - P.327-343.
360. Hay D. A., Morris D. J. Industrial economics: theory and evidence. - Oxford: Oxford University Press, 1979. - 385p.
361. Kharin A., Kishiylau D. Robust sequential testing of hypothesis on discrete probability distributions // Austrian Journal of Statistics. 2005. V.34. No.2. P.153-162.

362. Kotz S. Statistical Terminology - Russian Vs. English - in the Light of the Development of Statistics in the USSR // The American Statistician, 1965. Vol. 19, №. 3, P.16-22.
363. Kotz S. Statistics in the USSR // Survey, 1965. Vol. 57, October, P.132-141.
364. Kotz S., Smith K. The Hausdorff Space and Applied Statistics: A View from USSR. - The American Statistician. November 1988. Vol. 42. № 4. P. 241-244.
365. Kudrov A.V., Piterbarg V.I. On maxima of partial samples in gaussian sequences with psevdo-stationary trends // Liet. Matem. Rink. 2007. V.47. No.1. P.1-10.
366. Lehmann E.L., Romano J.P. Testing Statistical Hypotheses. – Springer, 2005. 784 p.
367. Orlov A.I. The Asymptotic Behavior of Statistics of Integral Type // Soviet math. dokl., 1974, V.15, No.6, P.1676-1680.
368. Orlov A. Sur la stabilite' dans les modeles economiques discrets et les modeles de gestion des stocks // Publications Econometriques. 1977. Vol.X. F.2. Pp.63-81.
369. Orlov A.I. Nonuniform Bounds on the Convergence Rate in the Invariance Principle // Journal of soviet Mathematics. 1987. V.39. №.2. P.2624-2632.
370. Orlov A.I. The Connection between fuzzy and random Sets // Moscow International Conference «Fuzzy Sets in Informatics» (September 20-23, 1988). Abstracts. - M.: ВЦ АН СССР, 1988. С.51-52.
371. Orlov A.I., Orlovskii I.V. Error Term Estimate on Second Order for the Distribution Function of Smirnov's Two-Sample Statistics // Journal of soviet Mathematics. 1988. V.40. №2. P.214-220.
372. Orlov A.I. Method of Moments for Testing the Goodness of Fit with a Parametric Family of Distribution Functions // Industrial laboratory. 1990 (April). V.55. №10. P.1209-1212.

373. Orlov A.I. Statistics of Nonnumerical Objects // Industrial laboratory. 1990 (September). V.56. №3. P.340-350.
374. Orlov A.I., Raushenbakh G.V. Similarity Metric: Axiomatic Definition and Asymptotic Normality // Journal of soviet Mathematics. 1991. V.53. №6. P.648-655.
375. Orlov A.I. Influence of Errors in Observations on Properties of Statistical Procedures (on the Example of Gamma-Distribution) // Journal of soviet Mathematics. 1991. V.56. №3. P.2434-2438.
376. Orlov A.I. How Often Are the Observations Normal? // Industrial laboratory. 1992 (January). V.57. №7. P.770-772.
377. Orlov A.I. Contemporary Problems of Introduction of Applied Statistics and Other Statistical Methods (Generalising Article) // Industrial laboratory. 1992 (July). V.58. №1. P.93-103.
378. Orlov A.I. Interval statistics // Interval Computations. 1992. No.1(3). Pp.44-52.
379. Orlov A.I. On the Development of the Statistics of Nonnumerical Objects // Design of Experiments and Data Analysis: New Trends and Results. - M.: ANTAL, 1993. P.52-90.
380. Orlov A.I. Instability in Parametric Methods of Rejecting Outlying Observations // Industrial laboratory. 1993 (January). V.58. №7. P.640-643.
381. Orlov A.I. Invariance Leads to the Interval Character of Ordinal Statistical Characteristics // APIC'95, El Paso, Extended Abstracts, A Supplement to the international Journal of Reliable Computing». 1995. Pp.159-161.
382. Robinson D.E. Estimates for the points of intersection of two polynomial regressions // Journal of American Statistical Association. 1964. V.19. N 2. P.214-238.
383. The teaching of statistics / Studies in mathematical education, vol.7. - Paris, UNESCO, 1991. - 258 pp.

384. Tikhov M.S. Statistical Estimation on the Basis of Interval-Censored Data // J. Math. Sciences. 2004. V.119. No.3. P.321-335.
385. Varian H.R. Intermediate Microeconomics. A Modern Approach. - New York: W.W.Norton & Company, 1993. - 623 pp.
386. Weinberg J.H., Schumaker J. Statistics: An Intuitive Approach (2-nd ed.). - Belmont, CA: Brooks-Cole. 1969.
387. Zadeh L.A. Fuzzy sets / Information and Control. - 1965. V.8. №3. P.338-353.

Некоторые публикации автора, вышедщие после защиты настоящей диссертации 13 октября 2009 г.

388. Орлов А.И. О развитии математических методов теории классификации // Заводская лаборатория. 2009. Т.75. No.7. С.51-63.
389. Орлов А.И. Эконометрика. Изд. 4-е, доп. и перераб. Учебник для вузов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2009. - 572 с.
390. Орлов А.И. Менеджмент: организационно-экономическое моделирование. Учебное пособие для вузов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2009. - 475 с.
391. Орлов А.И., Куликова С.Ю., Муравьева В.С. Организационно-экономическое моделирование в контроллинге // Контроллинг. 2009. No.5 (33). С. 42-47.
392. Орлов А.И. Организационно-экономические методы и модели и их применение в социологических исследованиях. – Математическое моделирование социальных процессов. Вып.10 : сб. ст. / Под ред. А.П. Михайлова. – М.: КДУ, 2009. – С.248 – 263.
393. Орлов А. И. Методологические ошибки ведут к неправильным управленческим решениям / Управление большими системами. Выпуск 27. М.: ИПУ РАН, 2009. С.59-65.

394. Орлов А.И. Вероятность и прикладная статистика: основные факты: справочник. – М.: КНОРУС, 2010. – 192 с.
395. Орлов А.И. Устойчивые математические методы и модели // Заводская лаборатория. 2010. Т.76. No.3. С.59-67.
396. Орлов А.И. Неформальная информационная экономика будущего – базовая организационно-экономическая теория // Вестник Южно-Российского государственного технического университета (Новочеркасского политехнического института). Серия «Социально-экономические науки». 2010. No.2. С.55-67.
397. Орлов А.И. Основные идеи неформальной информационной экономики будущего // ЭТАП: Экономическая Теория, Анализ, Практика. 2010, № 1. С.89-105.
398. Орлов А. И. Графы при моделировании процессов управления промышленными предприятиями / Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 «Сетевые модели в управлении». М.: ИПУ РАН, 2010. С.62-75.
399. Орлов А.И. О развитии экспертных технологий в нашей стране // Заводская лаборатория. 2010. Т.76. No.11. С.64-70.
400. Орлов А.И. Непараметрический метод наименьших квадратов с периодической составляющей: условия применимости. В сб.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 22. – Пермь: Перм. ун-т, 2010. – С.96-108.
401. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений : учебник.— М. : КноРус, 2011. — 568 с.
402. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование : учебник : в 3 ч. Ч.2. Экспертные оценки. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. - 486 с.

Приложение 1.

Некоторые задачи управления промышленными предприятиями, для решения которых необходимо применение экономико-математических моделей и методов (классификация по этапам жизненного цикла продукции)

Насколько широка потенциальная область применения экономико-математических методов и моделей при управлении промышленными предприятиями? Для обоснованного ответа на этот вопрос выделено 195 групп задач управления промышленными предприятиями, для решения которых необходимо применение тех или иных экономико-математических методов и моделей. Классификация проведена по традиционным составляющим этапов жизненного цикла продукции. Для каждой из 195 групп задач управления промышленными предприятиями указаны базовые группы экономико-математических методов.

Перечень подготовлен на основе опыта Центра статистических методов и информатики, Института высоких статистических технологий и эконометрики и Лаборатории экономико-математических методов в контроллинге МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Составляющие этапов ЖЦП	*Задачи управления предприятием, соответствующие составляющим этапов жизненного цикла продукции*	*Базовые группы экономико-математических методов*
1. Маркетинг		
1.1. Поисковый анализ развития экономики и НТП с целью выбора перспективного рынка	1.1.1. Анализ банков данных о продажах и заявок на поставку в рамках товарной группы	Описание данных, оценивание параметров и характеристик распределений, проверка гипотез, прогнозирование временных рядов, анализ нечисловых данных и экспертных оценок
	1.1.2. Прогнозирование потребностей и предпочтений потребителей	
	1.1.3. Оценивание развития рыночной ситуации с целью выделения перспективных сегментов	
1.2. Анализ и прогнозирование рынка для конкретной товарной группы	1.2.1. Изучение имеющейся информации о состоянии рынка (кабинетный подход)	Те же методы, что и в п.1.1, а также методы планирования и анализа выборочных (экспериментальных) исследований, визуализации данных, построения типологии потребителей, методы поддержки маркетинговых исследований и планирования эксперимента
	1.2.2. Специально организованный сбор новой информации и ее анализ (полевой подход)	
	1.2.3. Прогнозирование поведения потребителей и товаропроизводителей конкретной продукции	
	1.2.4. Анализ состояния и тенденций развития рынка с по-	

	мощью специально организованного опроса экспертов	
1.3. Выявление тенденций развития рынка конкретной продукции	1.3.1. Микроэкономические подходы к анализу состояния и тенденций развития рынка с учетом влияния динамики внешней среды предприятия	Оценивание кривых спроса и предложения, выявление динамики предпочтений потребителей с учетом бюджетных ограничений
	1.3.2. Экспертное, в том числе сценарное, прогнозирование динамики рынка	Технологии экспертного прогнозирования
	1.3.3. Системный анализ тенденций развития рынка с учетом как объективной, так и субъективной информации	Эскизное и эконометрическое (на основе систем регрессионных уравнений с лагами)
1.4. Разработка методов воздействия на рынок с помощью рекламы и других средств маркетинговых коммуникаций	1.4.1. Сравнение видов продукции, вариантов рекламных воздействий и т.п. с помощь выборочных опросов возможных потребителей	Методы выборочных исследований, обнаружения эффекта (проверки однородности), парных сравнений
	1.4.2. Выбор оптимального рекламного воздействия (с учетом законодательной базы и общественного мнения) на основе сбора и анализа мнений экспертов	Экспертные технологии разработки управленческих решений и оптимизации
	1.4.3. Планирование пробных вариантов рекламы и других	Методы планирования экспериментов (пи-

	видов маркетинговых коммуникаций и анализ результатов	лотных исследований)
	1.4.4. Планирование оптимального воздействия на рынок (с помощью рекламы; выпуска товаров, связанных с продвигаемой продукцией; законодательных актов и т.п.)	Статистический анализ и дискретная оптимизация медиапланирования, оптимизация рекламных бюджетов
2. Проектирование и/или разработка технических требований, разработка продукции (конструкторская подготовка производства)		
2.1. Сравнение различных образцов продукции, технически решений	2.1.1. Сравнение результатов испытаний двух видов продукции	Проверка однородности двух независимых выборок
	2.1.2. Сравнение по дум или нескольким характеристикам (критериям качества и надежности)	Методы принятия решений в многокритериальной постановке
	2.1.3. Сравнение с учетом регламента и продолжительности эксплуатации	Методы приведения к сопоставимым единицам
2.2. Оценка технического уровня имеющейся и проектируемой продукции	2.2.1. Сравнение образцов выпускаемой (разрабатываемой) продукции с базовыми образцами	Проверка статистических гипотез о значениях характеристик распределений
	2.2.2. Применение интегрального показателя технического уровня продукции, также и в случае, когда срок службы не является одно-	Оценка математического ожидания в сочетании с методами приведения к сопоставимым единицам

	значно .определенным	
	2.2.3. Агрегирование единичных показателей технического уровня	Расчет различных видов средних величин и регрессионный анализ
	2.2.4. Системный анализ с использованием объективных результатов измерений и субъективных экспертных оценок	Различные варианты экспертно-статистического метода
2.3. Прогнозирова-ние развития характеристик продукции, комплектующих, элементной базы и т.д.	2.3.1. Экстраполяция рядов динамики как для своего производства, так и для отечественных и зарубежных конкурентов (технический анализ)	Методы анализа временных рядов на основе трендовой, периодической и случайной компонент
	2.3.2. Восстановление зависимостей от информативных переменных (фундаментальный анализ)	Многомерный регрессионный анализ на основе выделения информативного подмножества признаков
	2.3.3. Прогнозирование на основе зависимостей между экономическими величинами	Экономические модели управления предприятием, балансовый метод
2.4. Оптимизация технических решений	2.4.1. Планирование и анализ экспериментов по выявлению механизма явления с целью оптимизации технических решений при технико-экономическом анализе	Методы построения адекватной модели и отбору факторов, значимо влияющих на результат
	2.4.2. Оптимизация значений	Методы планирования

<table>
<tr><td></td><td>управляющих параметров с целью максимизации полезного эффекта</td><td>экстремальных экспериментов</td></tr>
<tr><td rowspan="9">2.5. Сравнительный анализ образцов и технических решений, планирование испытаний и анализ их результатов, оценивание безопасности и надежности изделий</td><td>2.5.1. Выбор номенклатуры показателей надежности</td><td rowspan="9">Статистические методы надежности и анализа риска.
Оценка вероятности безотказной работы системы по моделям непревышения и «нагрузка-прочность» при распределении взаимодействующих характеристик по нормальному, логарифмически нормальному, экспоненциальному законам распределения и закону распределения Вейбулла-Гнеденко.
Первичная статистическая обработка данных. Оценивание параметров распределения выборки. Проверка однородности ряда дисперсий и однофакторный дисперсионный анализ для совокупности нормальных выборок. Несмещенное оце-</td></tr>
<tr><td>2.5.2. Планирование определительных испытаний</td></tr>
<tr><td>2.5.3. Оценка показателей надежности по результатам испытаний и эксплуатации</td></tr>
<tr><td>2.5.4. Прогнозирование параметрической надежности</td></tr>
<tr><td>2.5.5. Оценка показателей надежности по результатам сформированных испытаний</td></tr>
<tr><td>2.5.6. Оценка показателей надежности систем с различной структурой по испытаниям элементов</td></tr>
<tr><td>2.5.7. Одноступенчатый контроль показателей надежности по двум или нескольким контрольным уровням</td></tr>
<tr><td>2.5.8. Последовательный контроль показателей надежности по двум или нескольким контрольным уровням</td></tr>
<tr><td>2.5.9. Планирование объемов испытаний по одному кон-</td></tr>
</table>

	трольному уровню 2.5.10. Планирование объемов форсированных и утяжеленных испытаний 2.5.11. Оценка показателей надежности о цензурированных выборкам малого объема 2.5.12. Прогнозирование безопасности и долговечности по измерениям определяющих параметров на малом (3-5) числе образцов	нивание вероятности превышения. *Примеры областей использования:* испытания веществ и топлив на чувствительность к удару, трению, лучу огня, и другим воздействиям;
	2.5.13. Построение доверительных границ для показателей надежности систем с различными структурными схемами надежности по результатам ограниченного объема испытаний элементов 2.5.14. Планирование объемов контрольных испытаний при одноступенчатом и последовательном контроле надежности 2.5.15. Подтверждение высоких уровней надежности по малому числу образцов за счет форсирования и утяжеления режимов испытаний	испытания материалов на ударную и усталостную прочность или адгезионные свойства; испытания конденсаторов и диэлектриков на пробой; схема альтернативных исходов испытания, когда требуется определить влияние количественно измеряемого воздействующего фактора на состояние объекта.

3. Управление материальными ресурсами промышленного предприятия (материально-техническое снабжение)		
3.1. Анализ потребительского спроса	3.1.1. Описание данных о спросе на продукцию предприятия и на соответствующем товарном рынке	Статистические методы на основе корпоративной информационной системы
	3.1.2. Анализ доли рынка и динамики спроса	Данные отделов сбыта и маркетинга
	3.1.3. Прогнозирование спроса на продукцию предприятия	Статистические и экспертные методы прогнозирования
3.2. Определение характеристик системы управления материальными ресурсами	3.2.1. Определение издержек по доставке партий продукции	Методы статистического анализа данных управленческого и бухгалтерского учета
	3..2. Определение издержек по хранению материальных ресурсов и других логистических издержек	
	3.2.3. Определение характеристик ущерба от несвоевременного выполнения заявок потребителей (поредение платы за дефицит)	Выборочные и экспертные методы изучения мнений потребителей, статистический анализ результатов разрешения хозяйственных споров
3.3. Определение оптимальной политики управления материальными	3.3.1. Определение оптимальной структуры системы управления материальными ресурсами	Методы на основе классической модели управления запасами (Вильсона), двухуров-

ресурсами	3.3.2. Разработка оптимального плана поставок, позволяющего минимизировать издержки	невой модели управления запасами, модели определения оптимальных размеров поставок, моделей массового обслуживания и др.
	3.3.3. Определение оптимальных значений параметров системы управления материальными ресурсами с учетом неопределенностей экономических характеристик и спроса	
4. Подготовка и разработка производственных процессов (технологическая подготовка производства)		
4.1. Анализ экспериментальных и производственных данных	4.1.1. Анализ точности (колеблемости) разрабатываемых производственных процессов по данным экспериментов	Ведение банка данных о характеристиках изделий; первичная обработка данных, регрессионный и кластерный анализ, прогнозирование временных рядов, планирование и анализ экспериментов
	4.1.2. Анализ стабильности разрабатываемых производственных процессов по данным экспериментов	
	4.1.3. Сравнительный анализ аналогов разрабатываемых производственных процессов	
4.2. Оптимизация производственных процессов	4.2.1. Формирование перечня характеристик производственного процесса на осно-	Методы прикладной статистики: корреляционный анализ, кластер-

	ве изучения их взаимосвязей и отбора значимых факторов	анализ. Экспертные методы.
	4.2.2. Количественное описание динамики характеристик производственного процесса	Построение модели производственного процесса с помощью методов планирования и анализа экспериментов
	4.2.3. Выявление критериев оптимизации, разработка многокритериальной задачи оптимизации, сведение к однокритериальному постановке	Методы многокритериальной оптимизации и построения обобщенного (агрегированного) показателя.
	4.2.4. Численное решение задачи оптимизации	Численные методы поиска оптимума
	4.2.5. Применение результатов оптимизации при разработке управленческих решений	Методы теории принятия решений, в том числе экспертные.
4.3. Разработка системы управления и контроля производственными процессами	4.3.1. Разработка процедур отслеживания и прогноза меняющихся характеристик сырья и комплектующих	Методы прикладной статистики – статистики случайных величин, многомерного статистического анализа, анализа временных рядов и случайных процессов, статистики объ-

		ектов нечисловой природы
	4.3.2. Адаптация и оптимизация производственных процессов в соответствии с изменениями характеристик сырья, комплектующих, полуфабрикатов, расходных материалов, инструментов и аппаратов, персонала, метеорологических условий и т.п.	Методы математической статистики (в частности, для оценивания параметров математических моделей), планирования экстремальных, сравнительных и отсеивающих экспериментов, численной оптимизации
	4.3.3. Своевременное обнаружение разладки производственных процессов, в том числе: - анализ (расчет характеристик) метода статистического регулирования производственного процесса; - синтез контролирующего алгоритма для конкретного производственного процесса; - хранение информации по всем нужным пользователю объектам контроля и контролирующим процедурам и возможность оперативного	Методы контрольных карт статистического контроля стохастических процессов, представленных в форме временных рядов, с целью наискорейшего обнаружения момента спонтанного изменения вероятностных характеристик контролируемых процессов. Обнаружение скачкообразного или линейного изменения математического ожидания, вектора контролируемых па-

	перехода от работы с одним объектом к другому; - возможность одновременной работы (в режиме реального времени) нескольких контролирующих процедур (для различных объектов контроля), а также распечатки бланков для ведения контроля вручную	раметров, дисперсии, вероятности появления события, непараметрический метод обнаружения изменения характеристики сдвига
	4.3.4. Ведение «истории качества» - банка данных о качестве продукции и разладках производственных процессов в зависимости от характеристик сырья, комплектующих, персонала и других условий	Методы информационных технологий ведения банков данных и методы статистического анализа данных, том числе выявления зависимостей
4.4. Разработка системы выборочного приемочного контроля	4.4.1. Анализ и синтез планов плана контроля по альтернативному признаку (штучная продукция) для одноступенчатых, двухступенчатых и последовательных планов, в том числе по критериям связанных с контролем издержек на предприятии и суммарных затрат	Вероятностные модели выборки (гипергеометрическая и биномиальная) и основанные на них методы расчета и оптимизации характеристик планов контроля

	4.4.2. Анализ и синтез планов плана контроля по количественному признаку (штучная продукция)	Контроль среднего значения, дисперсии, по экстремальному значению, синтез планов по приемочному и браковочному уровням дефектности и др.
	4.4.3. Анализ и синтез планов контроля бесформенной продукции	Методы выделения единиц в объеме бесформенной продукции с использованием непараметрических коэффициентов корреляции
	4.4.4. Формирование выборки, подвергаемой контролю	Методы выборочных исследований и формирования случайных чисел
	4.4.5. Разработка технико-экономической политики, основанной на сравнении по экономическим показателям схем контроля и схем технического обслуживания и пополнения партий	Сравнение издержек при различных схемах организации взаимодействия поставщика и потребителя с оценкой максимально возможных отклонений
4.5. Нормирование производственных процессов	4.5.1. Хронометраж технологический операций	Планирование и анализ экспериментов, методы прикладной статистики
	4.5.2. Определения границ	Статистический анализ

	нормы в договорах с потребителями и во внутризаводской документации	точности и стабильности технологических процессов
	4.5.3. Правила браковки определенного процента продукции с экстремальными свойствами	Методы теории порядковых статистик и оценки квантилей распределений показателей качества.
5. Производство		
5.1. Статистическое регулирование и обнаружение разладки производственных процессов	5.1.1. Настройка (оценка параметров) алгоритмов статистического регулирования и обнаружения разладки	Статистические методы анализа точности и стабильности технологических процессов
	5.1.2. Реализация алгоритмов обнаружения внезапной разладки, выявления брака и проведения наладки	Контрольные карты Шухарта и кумулятивных сумм (карты средних значений, медиан, размахов, дисперсий, средних квадратических отклонений, числа дефектов, числа дефектных единиц продукции и т.д.)
	5.1.3. Реализация алгоритмов обнаружения постепенной разладки, выявления брака и проведения наладки	
	5.1.4. Информатизация процессов обнаружения и устранения разладок	Методы информационных технологий, в том числе в рамках КИС
5.2. Контроль качества сырья, материалов комплек-	5.2.1. Настройка (оценка параметров) алгоритмов контроля качества при входном,	Используются методы статистического контроля, выбранные и

тующих и т.п. на всех этапах производственных процессов	межоперационном, приемочном контроле продукции, правил технико-экономической политики, основанной на сравнении по экономическим показателям схем контроля и схем технического обслуживания и пополнения партий	обоснованные на этапе подготовки и разработки производственных процессов (технологической подготовки производства)
	5.2.2. Информатизация процессов контроля и принятия решений о качестве продукции	Методы информационных технологий, в том числе в рамках КИС
5.3. Оптимизация производственных процессов	5.3.1. Технико-экономическое оптимальное планирование	Методы математического программирования (линейного, целочисленного и др.) и планирования экстремального эксперимента
	5.3.2. Планирование и оптимизация издержек производства и себестоимости продукции	
	5.3.3. Оперативно-производственное планирование	
5.4. Статистический анализ результатов измерений, ведение «истории качества»	5.4.1. Анализ результатов измерений, сделанных в ходе выполнения производственного плана и вошедших в «историю качества»	Статистический анализ направлен на построение математических моделей производства, в том числе эконометр-

	5.4.2. Разработка предложений по совершенствованию технологических процессов, в том числе в рамках «кружков качества»	рических, Марковский и т.д. Например, обнаружение тесной корреляционной связи между двумя характеристиками производственного процесса позволяет ограничиться контролем только одной из них.
	5.4.3. Корректировка информационно-аналитического обеспечения процессов управления в ходе производства	
6. Контроль, проведение испытаний и обследований		
6.1. Контроль качества продукции	6.1.1. Входной контроль качества продукции	Методы анализа и синтеза планов контроля на основе использования приемочного и браковочного уровней дефектности, предела среднего выходного уровня дефектности, принципа распределения приоритетов, условной и безусловной оптимизации (Ю.К. Беляев, А. Хальд и др.)
	6.1.2. Межоперационный контроль качества продукции	
	6.1.3. Приемочный контроль качества продукции	
	6.1.4. Контроль качества продукции по многим признакам	
	6.1.5. Контроль качества бесформенной продукции	
	6.1.6. Организация технико-экономического обслуживания как альтернатива выходному контролю	
6.2. Контроль производственных	6.2.1. Контроль производственных процессов с целью	Параметрические и непараметрические

процессов	своевременного обнаружения мгновенной разладки	методы обнаружения разладки, теории контрольных карт, экстремумов и достижения границ случайными процессами (Г.Ф. Филаретов, И.В. Никифоров, А.А. Новиков и др.)
	6.2.2. Контроль производственных процессов с целью своевременного обнаружения постепенной разладки	
	6.2.3. Обнаружение разладки в случае произвольного распределения результатов контрольных измерений	
6.3. Испытания продукции различных видов (электрические, механические и т.п.)	6.3.1. Приемо-сдаточные контрольные испытания продукции	Методы математической теории надежности, основанные на вероятностно-статистических моделях динамики потребительских свойств изделий; статистические методы анализа цензурированных выборок показателей надежности, полученных при испытаниях; методы оптимального планирования определительных испытаний, прогнозирования параметрической надежности, подтверждения
	6.3.2. Периодические контрольные испытания продукции	
	6.3.3. Квалификационные контрольные испытания продукции	
	6.3.4. Типовые контрольные испытания продукции	
	6.3.4. Сертификационные контрольные испытания промышленной продукции	
	6.3.5. Испытания на безотказность	
	6.3.6. Испытания на ремонтопригодность	
	6.3.7. Испытания на долго-	

	вечность	высоких уровней надежности по малому числу образцов за счет форсирования и утяжеления режимов испытаний.
	6.3.8. Определительные испытания	
	6.3.9. Анализ показателей надежности систем с различными структурными схемами надежности по результатам ограниченного объема испытаний элементов	
	6.3.10. Другие виды испытаний на надежность	
6.4. Проведение обследований	6.4.1. Обследования произведенной продукции	Методы проведения выборочных обследований и анализа их результатов. Применения экспертных технологий. Информационные технологии ведения банков данных и статистического и экспертного анализа содержащихся в них сведений.
	6.4.2. Обследования состояния основных фондов и реализации производственных процессов	
	6.4.3. Обследования потребителей и их мнений о продукции	
	6.4.4. Обследования с целью подготовки к проведению аккредитации, лицензирования, сертификации, в том числе по ИСО 9000, ИСО 14000 и др.	
7. Упаковка и хранение		
7.1. Контроль соответствия упа-	7.1.1. Контроль с помощью органолептических методов	Методы анализа и синтеза планов статисти-

ковки техническим требованиям	7.1.2. Формирование выборки для контроля.	ческого контроля по альтернативным и количественным признакам на основе приемочного и браковочного уровней дефектности, ПСВУД, принципа распределения приоритетов, математических моделей издержек, экспертных методов организации контроля и принятия решений
	7.1.3. Анализ и синтез планов статистического контроля по одному альтернативному признаку	
	7.1.4. Анализ и синтез планов статистического контроля по нескольким альтернативным признакам	
	7.1.5. Анализ и синтез планов статистического контроля по количественным признакам	
	7.1.6. Экспертные методы контроля упаковки	
7.2. Контроль и испытания продукции в процессе хранения	7.2.1. Контроль качества единиц продукции в процессе хранения	Методы и программные продукты по статистическому приемочному контролю штучной продукции
	7.2.2. Контроль процессов с целью обнаружения изменений режима хранения и свойств продукции	Методы и программные продукты по статистическому регулированию технологических процессов
	7.2.3. Испытания продукции в процессе хранения	Методы планирования испытаний и анализа их результатов

7.3. Расчет гарантийных сроков хранения	7.3.1. Изучение закономерностей накопления дефектов в зависимости от срока хранения	Статистические методы анализа
	7.3.2. Выбор гарантийных сроков в зависимости от экономических показателей	Методы оптимизации в моделях определения экономического эффекта
	7.3.3. Ведение банка данных о предъявлении претензий и выполнении гарантийных обязательств, анализ накопленных данных и подготовка предложений по совершенствованию гарантийного обслуживания	Информационные технологии, в том числе в рамках КИС, статистический анализ данных, организационно-экономическое моделирование
7.4. Оптимизация условий хранения	7.4.1. Оптимизация режима хранения продукции на конкретном складе	Методы экстремального планирования эксперимента
	7.4.2. Оптимизация работы складского хозяйства промышленного предприятия	Методы оптимального управления запасами и материальными ресурсами
	7.4.3. Логистико-ориентированное управление ЖЦП на этапе упаковки и хранения на основе планов выполнения производственной программы	Оптимизация в логистико-производственных моделях движения материальных ресурсов и продукции

8. Реализация и распределение продукции		
8.1. Согласование планов контроля у поставщика и потребителя	8.1.1. Выбор подходов к согласованию планов контроля у поставщика и потребителя	Системный анализ взаимоотношений поставщика и потребителей
	8.1.2. Согласование планов контроля на основе выбора приемочного и браковочного уровней дефектности	Ведение переговоров с использованием расчетов характеристик планов контроля согласно теории статистического контроля
	8.1.3. Согласование планов контроля за основе выбора предела среднего выходного уровней дефектности	
	8.1.4. Согласование планов контроля на основе выбора вероятности превышения уровня дефектности в поставляемой партии	Ведение переговоров на основе информационно-аналитической поддержки согласно теории Ю.К. Беляева – Я.П. Лумельского
	8.1.5. Согласование планов контроля на основе минимизации суммарных издержек	Ведение переговоров на основе информационно-аналитической поддержки согласно модели А. Хальда
	8.1.6. Согласование планов контроля на основе принципа распределения приоритетов	Ведение переговоров на основе подхода В.А. Лапидуса (Центр «Приоритет», Нижний Новгород)

	8.1.7. Согласование планов контроля на основе выбора технико-экономической политики во взаимоотношениях поставщика и потребителя	Методы системного анализ взаимоотношений поставщика и потребителей, экономических расчетов, оценок экстремальных значений
	8.1.8. Ведение «истории взаимоотношений с потребителями», ее анализ и выработка рекомендаций по совершенствованию таких взаимоотношений	Информационные технологии ведения банков данных, статистический анализ и теория принятия решений
8.2. Анализ спорных (арбитражных) ситуаций	8.2.1. Выявление, анализ практики и формализация спорных ситуаций, связанных, например, с тем, что принятая поставщиком партия продукции забракована потребителем (параллельно с решением по договоренности или через арбитраж)	Спорные ситуации анализируют методами прикладной статистики и теории статистического контроля с целью минимизации ущерба путем выбора параметров планов контроля
	8.2.2. Выявление значимости для предприятия возникающих спорных ситуаций	Методы оценивания вероятности возникновения спорной ситуации
	8.2.3. Разработка методов сокращения ущерба и предотвращения спорных ситуаций	Методы проектирование систем планов контроля, в том числе на

		основе принципа распределения приоритетов
8.3. Разработка системы поставки с учетом стохастических возмущающих факторов	8.3.1. Разработка многообразия различных вариантов поставок выпускаемой предприятием продукции	Математические модели систем поставок с помощью различных видов транспорта, включая промежуточные склады, содержат различные стохастические возмущающие факторы, определяемые поведением потребителей (в том числе стохастичностью моментов подачи заявок на продукцию), природными факторами, действиями третьих лиц (см. также этап 3)
	8.3.2. Выработка критериев качества функционирования системы поставки продукции	
	8.3.3. Анализ стохастических возмущающих факторов, действующих на систему поставки	
	8.3.4. Проектирование рациональной системы поставки	
	8.3.5. Оптимизация параметров системы поставки	
	8.3.6. Анализ результатов функционирования системы поставки и разработка рекомендаций по ее совершенствованию	
8.4. Разработка системы массового обслуживания потребителей	8.4.1. Анализ ситуации в области массового обслуживания потребителей выпускаемой продукции	Системный анализ и методы прикладной статистики
	8.4.2. Разработка организационно-экономической модели	Организационно-экономическая модель

	массового обслуживания потребителей	определяется условиями работы конкретного предприятия. Систему массового обслуживания потребителей оптимизируют с помощью соответствующего этой системе программного продукта
	8.4.3. Оптимальная настройка (выбор параметров) системы массового обслуживания	
	8.4.4. Анализ результатов функционирования системы массового обслуживания потребителей и разработка рекомендаций по ее совершенствованию	
9. Монтаж и эксплуатация		
9.1. Обеспечение надежности	9.1.1. Обеспечение требуемого уровня безопасности функционирования	Вероятностный анализ безопасности
	9.1.2. Обеспечение требуемого уровня надежности функционирования	Вероятностно-статистические модели надежности функционирования технических устройств
	9.1.3. Определение необходимого числа запасных частей	
9.2. Планирование и анализ результатов периодических испытаний	9.2.3. Планирование сроков проведения испытаний	Планирование и анализ результатов периодических испытаний проводят с помощью статистических методов и соответствующего программного обеспечения, рассмотренных выше в разделе 6 «Контроль,
	9.2.2. Планирование объемов испытаний	
	9.2.3. Определение регламента испытаний и правил принятия решений	
	9.2.4. Ведение банка результатов испытаний	

	9.2.5. Анализ результатов испытаний и разработка рекомендаций по совершенствованию процедур монтажа и эксплуатации	проведение испытаний и обследований»
9.3. Гарантийное обслуживание и анализ рекламаций	9.3.1. Проектирование системы гарантийного обслуживания	Статистический анализ данных испытаний и эксплуатации изделий, оптимизация при проектировании
	9.3.2. Сопровождение системы гарантийного обслуживания, включая обеспечение доставки запасных частей	Информационные технологии, транспортная задача, районирование
	9.3.3. Определение экономически обоснованных гарантийных сроков	Оптимизация в рамках вероятностной модели
	9.3.4. Ведение банка рекламаций	Информационные технологии, прикладная статистика, системный подход, оптимизация системы гарантийного обслуживания на основе вероятностно-статистической модели
	9.3.5. Анализ рекламаций и разработка рекомендаций по совершенствованию гарантийного обслуживания	
9.4. Наладка и оптимизация технологических процессов	9.4.1. Разработка методов технической диагностики неисправностей	Математические методы классификации (кластерный и дискриминация анализ), планирова-

		ние экспериментов
	9.4.2. Рекомендации по наладке процессов	Экспертные оценки, методы оптимизации, планирования экспериментов
	9.4.3. Оптимизация технологических процессов	Линейное и целочисленное программирование, оптимизация на графах, планирование экстремальных экспериментов, экспертные оценки
9.5. Оптимизация монтажа и организации эксплуатации	9.5.1. Рационализация и оптимизация технологических процессов монтажа технических устройств	В интервальной статистике исходные данные – не числа, а интервалы. Находят нотну (максимально возможное отклонение функции, вызванное отклонениями аргументов), доверительные интервалы, рациональны объем выборки – для выборочных характеристик, аддитивных статистик, при оценивании параметров и проверке статистических гипотез
	9.5.2 Организация эксплуатации, нацеленная на минимизацию эксплуатационных издержек	
	9.5.3. Оптимизация монтажа и организации эксплуатации в случаях, когда нельзя пренебречь наличием погрешностей у результатов измерений и наблюдений, например, при эксплуатации электроэнергетических сетей. А также во многих задачах метрологии,	

	стандартизации, управления качеством, сертификации.	
10. Техническая помощь и обслуживание		
10.1. Организация массового обслуживания заявок на устранение неисправностей	10.1.1. Анализ ситуации с заявками потребителей на устранение неисправностей	Методы прикладной статистики (анализа статистических данных)
	10.1.2. Описание и прогноз потока заявок на устранение неисправностей	Моделирование временных рядов
	10.1.3. Проектирование системы массового обслуживания на основе экономических показателей	Теория массового обслуживания
	10.1.4. Сопровождение функционирования системы массового обслуживания	Информационные технологии
10.2. Гарантийное обслуживание	10.2.1. Анализ рекламаций и заявок на гарантийное обслуживание	Банки данных, прикладная статистика
	10.2.2. Определение экономически обоснованных гарантийных сроков	Оптимизация на основе вероятностно-статистической модели
	10.2.3. Проектирование системы гарантийного обслуживания	Системный анализ, оптимизация, теория принятия решений
	10.2.4. Сопровождение системы гарантийного обслуживания	Информационные технологии, оптимизация в логистике, транспортная задача

10.3. Управление запасами и ресурсами	10.3.1. Управление запасами и ресурсами запасных частей	Модели управления запасами и ресурсами – вероятностно-статистические, на основе теории нечеткости и интервальной математики (статистики интервальных данных)
	10.3.2. Управление запасами и ресурсами расходных материалов	
	10.3.3. Управление трудовыми ресурсами	
	10.3.4. Управление иными запасами и ресурсами	
10.4. Техническая диагностика	10.4.1. Построение типологии неисправностей	Кластерный анализ
	10.4.2. Построение правил принятия решений при диагностике	Теория принятия решений, деревья решений
	10.4.3. Диагностика на основе обучающих выборок	Непараметрический дискриминантный анализ на основе непараметрических ядерных оценок плотностей в пространствах произвольной природы
	10.4.4. Диагностика на основе обобщенного показателя состояния технического устройства	Линейный дискриминантный анализ, методы построения обобщенного показателя в теории принятия решений
	10.4.5. Сравнение алгоритмов диагностики с целью выбора	Прогностическая сила как показатель качества

	наилучшего с экономической точки зрения	алгоритма диагностики
11. Утилизация после использования		
11.1. Проектирование процесса утилизации	11.1.1. Анализ ситуации с утилизацией технических изделий определенного вида	Системный анализ, прикладная статистика
	11.1.2. Формирование многообразия различных технологий утилизации	Системный и экспертный анализ технологических возможностей
	11.1.3. Разработка критериев сравнения технологий утилизации	Системный анализ, экспертные опросы специалистов по технологиям
	11.1.4. Выбор конкретной технологии утилизации	Многокритериальная оптимизация, экспертные методы принятия решений
	11.1.5. Проектирование производственных процессов утилизации	Оптимизация проектирования
11.2. Контроль процесса утилизации	11.2.1. Контроль качества утилизации единиц продукции	Методы статистического контроля
	11.2.2. Контроль производственных процессов утилизации с целью своевременного обнаружения нежелательного изменения характеристик утилизируемой продукции	Методы статистического регулирования технологических процессов и обнаружения разладки
	11.2.3. Ведение «истории	Информационные техно-

	утилизации»	логии
	11.2.4. Выработка рекомендаций по совершенствованию процессов утилизации	Методы теории принятия решений, в т.ч. статистические, экспертные и оптимизационные
11.3. Совершенствование процесса утилизации	11.3.1. Выработка критериев оптимизации процесса утилизации	Многокритериальная оптимизация, построение обобщенного критерия
	11.3.2. Разработка оптимальных производственных процессов утилизации	Методы оптимизации
	11.3.3. Внедрение оптимальных производственных процессов утилизации	Методы управления проектами
11.4. Моделирование процесса утилизации	11.4.1. Моделирование штатной реализации процесса утилизации	При моделировании процесса утилизации в случае опасных отходов применяют статистические методы анализа чрезвычайных ситуаций, в частности, моделирования развития аварий на различных технологических процессах, распространения утечек, пожаров и т.д.
	11.4.2. Моделирование рисков аварий при утилизации	
	11.4.3. Моделирование экологических рисков в процессе утилизации	
	11.4.4. Моделирование иных рисков и чрезвычайных ситуаций в процессе утилизации	

Приложение 2.

Материалы о внедрении результатов диссертационной работы

Полученные результаты использовались в работе созданных и возглавляемых диссертантом Центра статистических методов и информатики, Института высоких статистических технологий и эконометрики и Лаборатории экономико-математических методов в контроллинге МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Практические положения диссертации ***реализованы*** на Московском заводе счетно-аналитических машин им. В.Д. Калмыкова, в ЗАО «Стинс Коман», НП «Объединение контроллеров». Основные результаты исследования внедрены в учебный процесс МГТУ им. Н.Э. Баумана. Реализация результатов диссертационной работы подтверждены соответствующими ***актами внедрения***.

Характеристики работы сайта *«Высокие статистические технологии»* http://orlovs.pp.ru/ А.И. Орлова и А.А. Орлова:

С 01.10.04 по 28.02.11 зарегистрировано 557770 посетителей. В 2010 году визитов 138054 из 105 стран, в среднем 378.23 визитов в день.

С момента создания сайта, т.е. с октября 2004 г., по 28.02.2011, скачали книги А.И. Орлова, включающие результаты настоящей диссертационной работы:

Прикладная статистика: 34268,

Теория принятия решений: 25975,

Эконометрика: 22720,

Нечисловая статистика: 11452.

(Источники: http://forum.orlovs.pp.ru/viewtopic.php?p=4388#4388 http://s07dl1.royaltelesystems.net:2082/awstats.pl?config=orlovs.pp.ru&ssl=&lang=ru

Институт высоких статистических технологий и эконометрики (ИВСТЭ) Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д.5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, ИБМ-2, оф. 509-ИБМ, ИВСТЭ.
http://orlovs.pp.ru, http://ibm.bmstu.ru/nil/lab.html
Тел. +7(499)267-02-22 Тел/Факс +7(499)261-9821.
E-mail: prof-orlov@mail.ru

Институт высоких статистических технологий и эконометрики создан в 1989 г. академиком Российской академии статистических методов, вице-президентом Всесоюзной статистической ассоциации (по секции статистических методов), доктором технических наук, профессором А.И.Орловым. Действует на базе кафедры ИБМ-2 «Экономика и организация производства» Московского государственного технического университета им. Н.Э.Баумана.

Институт высоких статистических технологий и эконометрики (ИВСТЭ) на хоздоговорных и госбюджетных началах занимается развитием, изучением и внедрением высоких статистических технологий, т.е. наиболее современных технологий анализа технических, экономических, социологических, медицинских данных, ориентированных на использование в условиях современного производства и экономики. Основной интерес представляют применения высоких статистических технологий для анализа конкретных экономических данных, т.е. в эконометрике.

Вначале Институт действовал как Всесоюзный центр статистических методов и информатики. В 1989-1992 гг. было выполнено более 100 хоздоговорных работ, в том числе для НИЦентра по безопасности атомной энергетики, ВНИИ нефтепереработки, ПО «Пластик», ЦНИИ черной металлургии им. Бардина, НИИ стали, ВНИИ эластомерных материалов и изделий, НИИ прикладной химии, ЦНИИ химии и механики, НПО «Орион», ВНИИ экономических проблем развития науки и техники, ПО «Уралмаш», «АвтоВАЗ», МИИТ, Казахского политехнического института, Донецкого государственного госуниверситета и др.

Затем Институт разрабатывал эконометрические методы анализа нечисловых данных, прогнозирования индекса инфляции и ВВП (для Министерства обороны РФ), методологию построения и использования математических моделей процессов налогообложения (для Госналогслужбы), методологию оценки рисков реализации инновационных проектов высшей школы (для Министерства науки и технологий РФ), оценивал влияние различных факторов на формирование налогооблагаемой базы ряда налогов (для Минфина РФ), прорабатывал перспективы применения современных статистических и экспертных методов для анализа данных о научном потенциале (для Министерства науки и технологий РФ), разрабатывал методологическое, программное и информационное обеспечение анализа рисков химико-технологических объектов (для Международного научно-технического центра), проводил маркетинговые исследования (для Промрадтехбанка, фирм, торгующих растворимым кофе, программным обеспечением), выполнял иные работы.

Институт ведет и фундаментальные исследования, в частности, госбюджетные научные исследования в МГТУ им. Н.Э.Баумана. Основные публикации сосредоточены в журналах «Заводская лаборатория», «Контроллинг», «Российское предпринимательство», «Управление большими системами», «Социология: методология, методы, математическое моделирование».

Источник: сайт «Высокие статистические технологии»

http://orlovs.pp.ru/ivst.php